DEVOIR N°1

Exercice 1 :

On s'intéresse à la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4x+1}{\sqrt{x+1}+1}$

1) ↳ On a :

$$f(1) = \frac{4\times 1+1}{\sqrt{1+1}+1} = \frac{5}{\sqrt{2}+1} = \frac{5(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{5\sqrt{2}-5}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{5\sqrt{2}-5}{2-1} = \frac{5\sqrt{2}-5}{1} = 5\sqrt{2}-5.$$

↳ On a $f(-\frac{1}{2}) = \dfrac{4\times(-\frac{1}{2})+1}{\sqrt{-\frac{1}{2}+1}+1} = \dfrac{-2+1}{\sqrt{\frac{-1+2}{2}}+1} = \dfrac{-1}{\sqrt{\frac{1}{2}}+1} = \dfrac{-1}{\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+1} = \dfrac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \dfrac{-1}{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$.

Ce qui nous donne $f(-\frac{1}{2}) = -1\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = -\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = -\dfrac{(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1} = -\dfrac{2-\sqrt{2}}{2-1}$.

D'où $f(-\frac{1}{2}) = -\dfrac{2-\sqrt{2}}{2-1} = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}-2$

↳ On a $f(\frac{1}{9}) = \dfrac{4\times(\frac{1}{9})+1}{\sqrt{\frac{1}{9}+1}+1} = \dfrac{\frac{4}{9}+1}{\sqrt{\frac{1+9}{9}}+1} = \dfrac{\frac{4+9}{9}}{\sqrt{\frac{10}{9}}+1} = \dfrac{\frac{13}{9}}{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{9}}+1} = \dfrac{\frac{13}{9}}{\frac{\sqrt{10}}{3}+1} = \dfrac{\frac{13}{9}}{\frac{\sqrt{10}+3}{3}}$.

Ce qui nous donne $f(\frac{1}{9}) = \dfrac{\frac{13}{9}}{\frac{\sqrt{10}+3}{3}} = \dfrac{13}{9}\times\dfrac{3}{\sqrt{10}+3} = \dfrac{13}{3(\sqrt{10}+3)} = \dfrac{13(\sqrt{10}-3)}{3(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)}$.

Donc $f(\frac{1}{9}) = \dfrac{13(\sqrt{10}-3)}{3(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)} = \dfrac{13\sqrt{10}-39}{3(\sqrt{10}^2-3^2)} = \dfrac{13\sqrt{10}-39}{3(10-9)} = \dfrac{13\sqrt{10}-39}{3}$.

↳ $f(-5)$ n'existe pas car le calcul conduit à une racine carrée de −4 qui n'existe bien évidemment pas (la fonction racine carrée n'est définie que pour les réels positifs ou nuls).

↳ On a $f(120) = \dfrac{4\times 120+1}{\sqrt{120+1}+1} = \dfrac{481}{\sqrt{121}+1} = \dfrac{481}{(\sqrt{11})^2+1} = \dfrac{481}{11+1} = \dfrac{481}{12}$.

↳ On a $f(3) = \dfrac{4\times 3+1}{\sqrt{3+1}+1} = \dfrac{13}{\sqrt{4}+1} = \dfrac{13}{2+1} = \dfrac{13}{3}$.

2) Résolution de l'équation f(x)=0

↳ Tout d'abord f(x) existe si et seulement si $\begin{cases} \sqrt{x+1}+1 \text{ existe} \\ \text{et } \sqrt{x+1}+1 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x+1 \geq 0$ (car on a toujours $\sqrt{x+1}+1 \neq 0$ pour tout réel x : c'est une somme de deux réel positifs)

$\Leftrightarrow x \geq -1$

Donc on doit résoudre l'équation f(x)=0 dans le domaine $D =]-1\ ;+\infty[$.

↳ Soit maintenant $x \in D =]-1\ ;+\infty[$; alors x est solution de l'équation si et seulement si f(x)=0

$\Leftrightarrow \dfrac{4x+1}{\sqrt{x+1}+1} = 0 \Leftrightarrow 4x+1 = 0(\sqrt{x+1}+1)$ (par produit en croix)

$\Leftrightarrow 4x+1 = 0 \Leftrightarrow 4x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}$.

Comme $-\dfrac{1}{4} \in D$, il est bien solution de l'équation.

Donc la solution de l'équation f(x)=0 est $-\dfrac{1}{4}$.

-- **FIN DE L'EXERCICE 1**

Exercice 2 :

1) Il s'agit de compléter le tableau :

Calcul des prix pour 10 voyages :

↳ Avec le forfait A : 150 € car le prix est le même quel que soit le nombre de voyages.

↳ Avec le forfait B : 100 + 20×10=300€ (car on paye 100 € puis 20 €/voyage).

↳ Avec le forfait C : 90 + 50×10=590 € (car on paye 90 € puis 50 €/voyage).

Calcul des prix pour 20 voyages :

↳ Avec le forfait A : 150 € car le prix est le même quel que soit le nombre de voyages.

↳ Avec le forfait B : 100 + 20×20=500€ (car on paye 100 € puis 20 €/voyage).

↳ Avec le forfait C : 90 + 50×20=1090 € (car on paye 90 € puis 50 €/voyage).

On complète ainsi le tableau fourni :

Nombre de voyages	Forfait A	Forfait B	Forfait C
10	150	300	590
20	150	500	1090

2) ↳ Pour le forfait A on paye 150 € quel que soit le nombre de voyage. On a donc vite y_A=150.

↳ Pour le forfait B on paye 100 € puis 20€ par voyage. Donc pour x voyages on doit payer 100€ et 20x (€). On a donc la formule y_B=100+20x.

↳ Enfin, pour le forfait C on paye 90 € puis 50€ par voyage. Donc pour x voyages on doit payer 90€ et 50x (€). On a donc la formule y_C=90+50x.

On a donc bien démontré les formules demandées.

3) Tracé des droites D_A : y=150 ; D_B : y=100+20x et D_C : y=90+50x.

↳ D'après le tableau précédent, la droite D_A passe par les deux points de coordonnées (10 ; 150) et (20 ; 150) ; la droite D_B passe par les points de coordonnées (10 ; 300) et (20 ; 500) et enfin, la droite D_C passe par les points de coordonnées (10 ; 590) et (20 ; 1090).

En plaçant ces points le repère, on trace facilement ces trois droites.

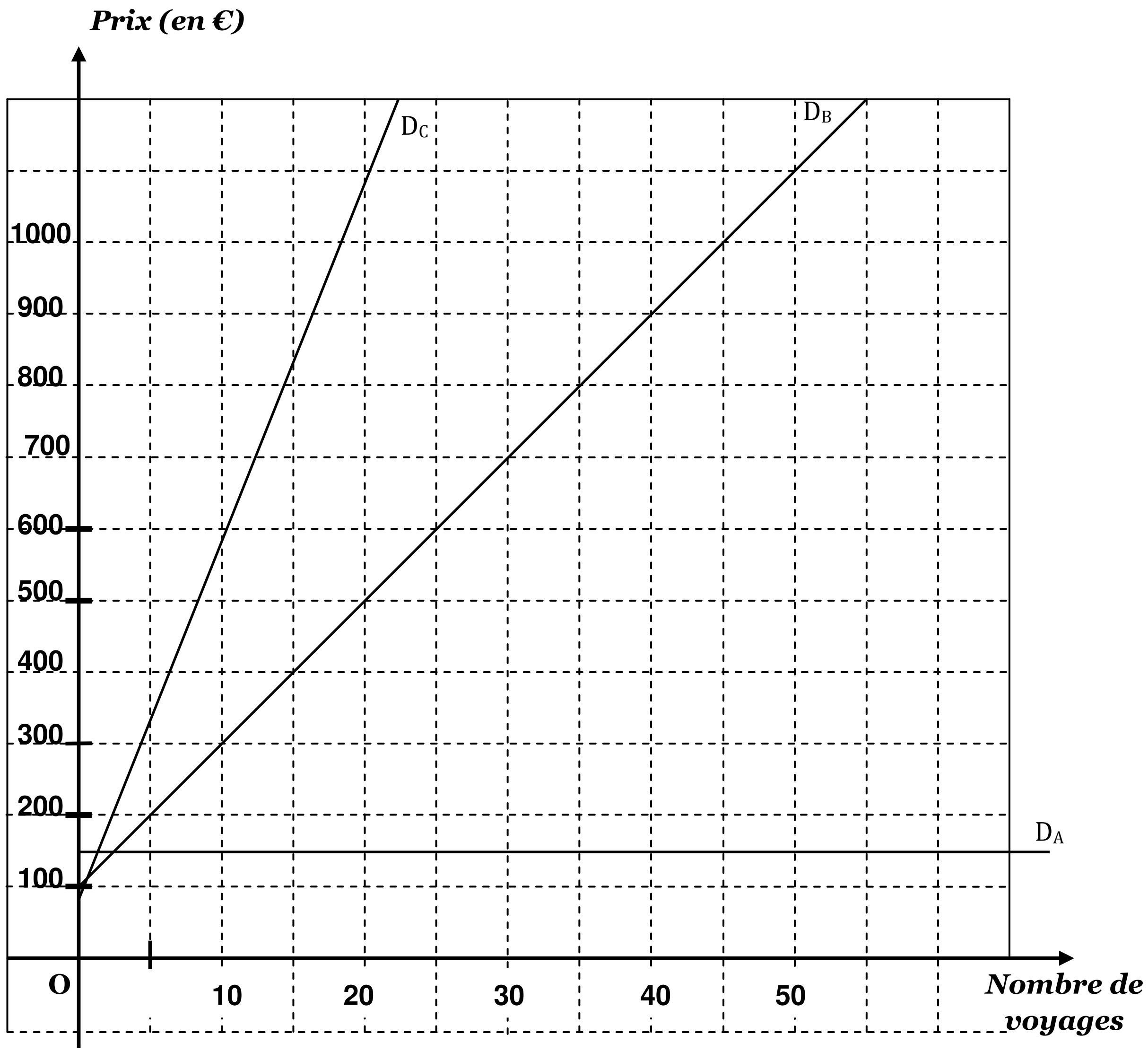
↳ On choisit comme échelles graphique 1cm pour 10 voyages (en abscisses) et 1cm pour 100 € (en ordonnées).

En méthodologie : Une fois que les unités graphiques (échelles) sont fixées le nombre de centimètres à représenter pour chaque coordonnée est déterminée : il suffit alors de diviser la valeur de la coordonnée par l'unité graphique de l'axe correspondant.

Par exemple pour représenter le point de coordonnées (20 ; 500) il faut en abscisses 20÷10=2cm et en ordonnées 500÷100=5cm.

<u>RAPPEL FONDAMENTAL</u> : Lorsque l'énoncé impose des unités graphiques (c'est presque toujours le cas à l'examen) il faut impérativement les respecter.

On obtient ainsi le tracé ci-dessous :



4) Rappelons (et c'est très important) que graphiquement, un forfait est plus intéressant (c'est-à-dire que son prix est plus faible) qu'un autre tarif, lorsque la droite qui lui est associée se situe en dessous de la droite associée à l'autre tarif.

Il s'agit donc de regarder suivant les valeurs des abscisses (c'est-à-dire du nombre de voyages ici), quelle est le forfait dont la droite se situe en dessous des deux autres.

On voit alors graphiquement que :

↳ Pour 0 voyage effectué, le forfait C est plus intéressant ;

↳ Pour un nombre de voyages allant de 1 à 2 voyages, c'est le forfait B qui est le plus intéressant (car sa droite D_B est en dessous des deux autres droites D_A et D_C) ;

↳ A partir de 3 voyages, c'est le forfait A qui est le plus intéressant (car sa droite D_A est en dessous des deux autres droites D_B et D_C).

5) Il s'agit de contrôler les résultats de la question précédente par le calcul (méthode la plus fiable). Nous allons alors déterminer dans quels cas (c'est-à-dire pour quel nombre de voyage) chacun des trois forfaits (A, B et C) est plus intéressant que les deux autres :

↳ Le forfait A est plus intéressant que les forfaits B et C lorsque $y_A<y_B$ et $y_A<y_C$. Ce qui équivaut successivement à :

$(150 < 100 + 20x \quad \text{et} \quad 150 < 90 + 50x) \Leftrightarrow (100 + 20x > 150 \quad \text{et} \quad 90 + 50x > 150)$

$\Leftrightarrow (20x > 150\text{-}100 \quad \text{et} \quad 50x > 150\text{-}90) \Leftrightarrow (20x > 50 \quad \text{et} \quad 50x > 60)$

$\Leftrightarrow (x > \frac{50}{20} \quad \text{et} \quad x > \frac{60}{50}) \Leftrightarrow (x > 2{,}5 \quad \text{et} \quad x > 1{,}2) \Leftrightarrow x > 2{,}5$.

Donc le forfait A est plus intéressant à partir de 3 voyages (nombre de voyages supérieur à 2,5).

↳ Le forfait B est plus intéressant que les forfaits A et C lorsque $y_B<y_A$ et $y_B<y_C$. Ce qui équivaut successivement à :

$(100 + 20x < 150 \quad \text{et} \quad 100 + 20x < 90 + 50x) \Leftrightarrow (20x < 150 - 100 \quad \text{et} \quad 20x - 50x < 90 - 100)$

$\Leftrightarrow (20x < 50 \quad \text{et} \quad -30x < -10) \Leftrightarrow (x < \frac{50}{20} \quad \text{et} \quad x > \frac{-10}{-30})$ (Notez bien que dans une inégalité, lorsqu'on divise par un nombre négatif on change le sens de l'inégalité)

$\Leftrightarrow (x < 2{,}5 \quad \text{et} \quad x > 0{,}3333333\cdots) \Leftrightarrow (0{,}3333333\cdots < x < 2{,}5) \Leftrightarrow (1 \le x \le 2)$ (Notez bien que le nombre de voyage est un nombre entier).

Donc le forfait B est plus intéressant pour 1 à 2 voyages.

↳ Enfin le forfait C est plus intéressant que les forfaits A et B lorsque $y_C<y_A$ et $y_C<y_B$. Ce qui équivaut successivement à :

$(90 + 50x < 150 \quad \text{et} \quad 90 + 50x < 100 + 20x) \Leftrightarrow (50x < 150 - 90 \quad \text{et} \quad 50x - 20x < 100 - 90)$

$\Leftrightarrow (50x < 60 \quad \text{et} \quad 30x < 10) \Leftrightarrow (x < \frac{60}{50} \quad \text{et} \quad x < \frac{10}{30}) \Leftrightarrow (x < 1{,}2 \quad \text{et} \quad x < 0{,}3333\cdots)$

$\Leftrightarrow x < 0{,}3333\cdots \Leftrightarrow x=0$ (car le nombre de voyage x est un entier naturel ; c'est-à-dire positif ou nul).

Donc le forfait C n'est plus intéressant que pour O voyage.

On a donc bien retrouvé les résultats obtenus graphiquement.

. -- **FIN DE L'EXERCICE 2**

Exercice 3 :

RAPPEL DE COURS TRES FONDAMENTAL (ATTENTION C'EST TRES IMPORTANT) :

On a la formule des intérêts composés :

On note :

↳ $t = \frac{x}{100}$ **le taux décimal annuel du placement où x % est le taux annuel du placement ;**

↳ C_0 **le capital initial (c'est la somme placée) ;**

↳ **n la durée du placement en année ;**

↳ C_n **la valeur acquise par le placement au bout de n année : c'est le capital dont on dispose au bout de n années.**

Alors on a la formule $C_n = C_0 \times (1 + t)^n$.

<u>NOTE</u> : Le montant total des intérêts au bout de n années est $I_n = C_n - C_0$.

1) ↳ Calcul de la somme dont disposera François au bout de 2 ans :

Ici, le taux annuel de placement est 5% ; donc on a $t = \frac{5}{100} = 0{,}05$ et $1 + t = 1{,}05$.

La somme dont disposera François au bout de 2 ans est :

$C_2 = C_0 \times (1+t)^2 = 150 \times (1{,}05)^2 = 165{,}38\,€$

↳ Calcul de la somme dont disposera Georges au bout de 2 ans :

Ici, le taux annuel de placement est 10% ; donc on a $t' = \frac{10}{100} = 0{,}1$ et $1 + t' = 1{,}1$.

La somme dont disposera François au bout de 2 ans est :

$C'_2 = C'_0 \times (1 + t')^2 = 50 \times (1{,}1)^2 = 60{,}50\,€$

Notez bien que les sommes d'argent s'arrondissent toujours au centième (deux chiffres après la virgule). Cette remarque doit être d'application naturelle sans qu'aucune consigne d'arrondi ne soit imposée. Il convient dès lors de bien revoir les règles d'arrondi des nombre.

2) ↳ Au bout de n années, François disposera de la somme :

$C_n = C_0 \times (1+t)^n = 150 \times (1{,}05)^n$

↳ Au bout de n années, Georges disposera de la somme :

$C'_n = C'_0 \times (1+t)^n = 50 \times (1{,}1)^n$

3) Il s'agit de déterminer le nombre d'années au bout duquel les deux sommes sont égales ; c'est-à-dire de déterminer n pour que $C_n = C'_n$ (il s'agit d'une équation à résoudre et c'est précisément ce que nous nous préparons à faire).

Or $C_n = C'_n \Leftrightarrow 150 \times (1{,}05)^n = 50 \times (1{,}1)^n \Leftrightarrow \frac{150}{50} = \frac{(1{,}1)^n}{(1{,}05)^n} \Leftrightarrow (\frac{1{,}1}{1{,}05})^n = \frac{150}{50}$ (on a utilisé la propriété $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$)

$\Leftrightarrow (\frac{1{,}1}{1{,}05})^n = 3 \Leftrightarrow \ln[(\frac{1{,}1}{1{,}05})^n] = \ln(3)$ (par passage aux logarithmes népériens)

$\Leftrightarrow n \times \ln(\frac{1{,}1}{1{,}05}) = \ln(3)$ (à l'aide de la propriété $\ln(a^n) = n\ln(a)$)

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln(3)}{\ln(\frac{1{,}1}{1{,}05})} = 23{,}6159$$

C'est donc au cours de la 24ème année que les deux sommes seront égales.

. -- **FIN DE L'EXERCICE 3**

Exercice 4 :

1) **Suites arithmétiques : Nous commençons par un rappel hautement fondamental.**

↳ **Définition :** Une suite (u_n) est dite arithmétique si $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, où r est un nombre réel appelé **raison** de la suite.

↳ **Propriétés fondamentales :** Soit maintenant (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

■ Alors on a les formules :

(F1) : $u_n = u_0 + nr$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$;

(F2) : En général $u_n = u_p + (n-p)r$ pour tous entiers naturels n et p ;

UTILISATION : Ces deux formules servent à gérer les termes de la suite et à exprimer le terme général u_n en fonction de n.

■ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ (c'est la somme des n+1 premiers termes de la suite arithmétique). Alors on a la formule :

(F3) : $S_n = (n+1) \times \left[\frac{u_0 + u_n}{2}\right]$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$;

En général, on a la formule :

$$S_n = \left(\begin{matrix}\text{Nombre de termes}\\ \text{de la somme}\end{matrix}\right) \times \left[\frac{\text{Premier terme de la somme} + \text{Dernier terme de la somme}}{2}\right]$$

UTILISATION : Cette formule sert à calculer la somme des termes d'une suite arithmétique.

Nous disposons maintenant de tout ce qu'il faut pour attaquer n'importe quel exercice sur les suites arithmétiques.

a) Il s'agit de déterminer la suite arithmétique de premier terme U_0 telle que $U_3 = 10$ et $U_5 = -10$. Cela revient à déterminer l'expression du terme général U_n en fonction de n.

↳ On commence par calculer la raison r de la suite : on lance alors la formule (F2) qui nous donne : $U_5 = U_3 + (5-3)r$. On a alors $-10 = 10 + 2r$ ou encore $2r = -10 - 10$. D'où $r = \frac{-20}{2} = -10$.

↳ On calcule maintenant U_0 en utilisant la formule (F1) qui donne $U_3 = U_0 + 3r$. On a alors vite $U_0 = U_3 - 3r = 10 - 3 \times (-10) = 40$.

La suite cherchée est donc la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 40$ et de raison $r = -10$. D'après la formule (F1) on a alors $U_n = U_0 + nr = 40 + n \times (-10)$; c'est-à-dire $U_n = 40 - 10n$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

b) On nous demande de calculer la somme des 50 premiers termes de la suite (U_n), c'est-à-dire de calculer $S_{49} = U_0 + U_1 + \cdots + U_{49}$ (Notez bien que cette somme comporte bien 50 termes puisqu'on la démarre à U_0 : attention donc au décalage de 1).

On utilise bien évidemment la formule (F3) de la fiche de rappel qui nous donne sans résistance :

$S_{49} = U_0 + U_1 + \cdots + U_{49} = 50 \times \left(\frac{U_0 + U_{49}}{2}\right)$.

Or $U_n = 40 - 10n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; donc $U_{49} = 40 - 10 \times 49 = -450$. Finalement on a :

$S_{49} = 50 \times \left(\frac{U_0 + U_{49}}{2}\right) = 50 \times \left(\frac{40 - 450}{2}\right) = 50 \times \left(\frac{-410}{2}\right) = -10250$.

La somme des 50 premiers termes de la suite (U_n) est donc -10250.

2) **Suites géométriques : Nous se relance par un rappel hautement fondamental.**

↳ **Définition :** Une suite (u_n) est dite géométrique si $u_{n+1} = q \times u_n$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, où q est un nombre réel appelé raison de la suite.

↳ **Propriétés fondamentales :** Soit maintenant (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

■ Alors on a les formules :

(F1) : $u_n = u_0 \times q^n$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$;

(F2) : En général $u_n = u_p \times q^{n-p}$ pour tous entiers naturels n et p ;

UTILISATION : Ces deux formules servent à gérer (c'est-à-dire calculer) les termes de la suite et à exprimer le terme général u_n en fonction de n.

■ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ (c'est la somme des n+1 premiers termes de la suite géométrique). Alors on a la formule :

(F3) : $S_n = u_0 \times \left[\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$;

En général, on a la formule s'écrit (en Français) :

$$S_n = \left(\begin{matrix}\text{Premier terme}\\ \text{de la somme}\end{matrix}\right) \times \left[\frac{(1-\text{raison})^{\text{Nombre de termes de la somme}}}{1-\text{raison}}\right]$$

UTILISATION : Cette formule sert à calculer la somme des termes d'une suite géométrique.

Nous sommes maintenant hautement préparés pour attaquer n'importe quel exercice sur les incontournables suites géométriques.

a) On nous demande de déterminer la suite géométrique de premier terme U_0 telle que $U_5 = \sqrt{3}$ et $U_3 = 3\sqrt{3}$. Cela revient à déterminer l'expression du terme général U_n en fonction de n.

↳ On commence par calculer la raison q de la suite à l'aide de la formule (F2) qui nous donne : $U_5 = U_3 \times q^{5-3}$ ou encore $\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \times q^2$. On a alors $q^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}$. On en déduit aussitôt que $q = \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ou $q = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (Notez que l'on a la propriété $x^2 = a > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$).

Il y a donc deux valeurs possibles pour la raison q. Donc il existe deux suites géométriques répondant à la question. Mais l'énoncé demande juste de déterminer <u>une</u> de ces suites. **On choisit donc par exemple la valeur $q = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (qui sera plus maniable dans les calculs).**

↳ On calcule maintenant U_0 en utilisant la formule (F1) qui donne $U_3 = U_0 \times q^3$. On a alors très vite $U_0 = \dfrac{U_3}{q^3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\frac{(\sqrt{3})^3}{(3)^3}}$. Mais $(\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$ et $3^3 = 27$; il vient alors extrêmement facilement $U_0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{\frac{(\sqrt{3})^3}{(3)^3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{27}} = 3\sqrt{3} \times \dfrac{27}{3\sqrt{3}} = 27$.

Une suite cherchée est donc la suite géométrique de premier terme $U_0 = 27$ et de raison $q = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. D'après la formule (F1) on a alors $U_n = U_0 \times q^n = 27 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$; c'est-à-dire $U_n = 27 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

b) On nous demande de calculer la somme des 10 premiers termes de la suite (U_n), c'est-à-dire de calculer $S_9 = U_0 + U_1 + \cdots + U_9$ (Notez bien que cette somme comporte bien 10 termes puisqu'on la démarre à U_0 : attention donc au décalage de 1).

On utilise bien évidemment la formule (F3) de la fiche de rappel qui nous donne sans résistance :

$$S_9 = U_0 \times (\frac{1-q^{10}}{1-q}) = 27 \times \left[\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{10}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}\right] = 27 \times \left[\frac{1-\frac{(\sqrt{3})^{10}}{3^{10}}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}\right] = 27 \times \left[\frac{\frac{3^{10}-(\sqrt{3})^{10}}{3^{10}}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}\right].$$

Donc $S_9 = 27 \times \left[\frac{\frac{3^{10}-(\sqrt{3})^{10}}{3^{10}}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}\right] = 27 \times \frac{3^{10}-(\sqrt{3})^{10}}{3^{10}} \times \frac{3}{3-\sqrt{3}}$ (par la règle de multiplication des fractions).

Or $27 = 3^3$ et $(\sqrt{3})^{10} = \left[(\sqrt{3})^2\right]^5 = 3^5$. Nous obtenons alors :

$S_9 = 27 \times \frac{3^{10}-(\sqrt{3})^{10}}{3^{10}} \times \frac{3}{3-\sqrt{3}} = \frac{3^3(3^{10}-3^5) \times 3}{(3-\sqrt{3}) \times 3^{10}} = \frac{3^3 \times 3^5 \times 3 \times (3^5-1)}{(3-\sqrt{3}) \times 3^{10}}$ (Nous avons mis 3^5 en facteur entre les termes de la parenthèse du numérateur).

On finit alors de plus en plus vite puisque $S_9 = \frac{3^3 \times 3^5 \times 3 \times (3^5-1)}{(3-\sqrt{3}) \times 3^{10}} = \frac{3^9(3^5-1)}{(3-\sqrt{3}) \times 3^{10}} = \frac{(3^5-1)}{(3-\sqrt{3}) \times 3} = \frac{242}{3(3-\sqrt{3})} = \frac{242(3+\sqrt{3})}{3(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}$;

Ce qui donne $S_9 = \frac{242(3+\sqrt{3})}{3(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{726+242\sqrt{3}}{3[(3)^2-(\sqrt{3})^2]} = \frac{726+242\sqrt{3}}{3 \times (9-3)} = \frac{726+242\sqrt{3}}{18} = \frac{363+121\sqrt{3}}{9}$

La valeur exacte de la somme des 10 premiers termes de la suite est donc $S_9 = \frac{363+121\sqrt{3}}{9}$ et le calcul donne aussi une valeur approchée $S_9 = 63{,}62$.

. -- **FIN DE L'EXERCICE 4**