

DEVOIR N°2 DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 :

On s'intéresse à la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(x) - 6}{\ln(x) - 5}$

$$a) f(x) \text{ existe si et seulement si } \begin{cases} \ln(x) \text{ existe} \\ \text{et } \ln(x) - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{et } \ln(x) \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{et } x \neq e^5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in]0 ; e^5 [\cup]e^5 ; +\infty [.$$

Donc le domaine de définition de la fonction f est bien $D_f =]0 ; e^5 [\cup]e^5 ; +\infty [= \mathbb{R}_+^* \setminus \{e^5\}$.

b) On pose $u(x) = \ln(x) - 6$ et $v(x) = \ln(x) - 5$. Les fonctions u et v sont alors dérivables sur D_f et on a aussitôt $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

Il est maintenant temps de rappeler la formule de dérivation d'un quotient

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}. \text{ Cette formule donne alors immédiatement :}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln(x) - 5) - (\ln(x) - 6)\frac{1}{x}}{(\ln(x) - 5)^2} = \frac{\frac{\ln(x) - 5 - \ln(x) + 6}{x}}{(\ln(x) - 5)^2} = \frac{\frac{\ln(x) - 5 - \ln(x) + 6}{x}}{(\ln(x) - 5)^2} = \frac{1}{x(\ln(x) - 5)^2}.$$

Ce qui nous donne ensuite $f'(x) = \frac{1}{x(\ln(x) - 5)^2} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{(\ln(x) - 5)^2}$; d'où finalement

$$f'(x) = \frac{1}{x(\ln(x) - 5)^2} \text{ (**c'est la dérivée de la fonction f**).$$

c) Résolution de l'équation $f(x) = 5$

Soit $x \in D_f$; alors x est solution de cette équation si et seulement si $f(x) = 5$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x) - 6}{\ln(x) - 5} = 5 \Leftrightarrow \ln(x) - 6 = 5(\ln(x) - 5) \quad (\text{par produit en croix pour se débarrasser des$$

dénominateurs)

$$\Leftrightarrow \ln(x) - 6 = 5\ln(x) - 25 \quad (\text{par développement dans le membre de droite})$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) - 5\ln(x) = -25 + 6 \Leftrightarrow -4\ln(x) = -19 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{19}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{19}{4}} \quad (\text{par passage aux exponentielles car on a la propriété fondamentale : } \ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a)$$

La solution de l'équation est donc $e^{\frac{19}{4}}$.

NOTE : la notation e désigne ici la fonction exponentielle parfois notée \exp .

$$\text{VERIFICATION : } f\left(e^{\frac{19}{4}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{19}{4}}\right) - 6}{\ln\left(e^{\frac{19}{4}}\right) - 5} = \frac{\frac{19}{4} - 6}{\frac{19}{4} - 5} = \frac{\frac{19}{4} - \frac{24}{4}}{\frac{19}{4} - \frac{20}{4}} = \frac{\frac{19 - 24}{4}}{\frac{19 - 20}{4}} = \frac{-5}{-1} = \frac{5}{1} = 5.$$

NOTE : Dans ce calcul on a utilisé la propriété fondamentale $\ln(e^x) = x$ pour tout nombre réel x .

d) Valeur de x pour laquelle f s'annule

$$\text{Soit } x \in D_f; \text{ alors } f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)-6}{\ln(x)-5} = 0 \Leftrightarrow \ln(x)-6 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 6 \Leftrightarrow x = e^6.$$

La fonction f s'annule donc pour $x = e^6$.

-----FIN DE L'EXERCICE 1

Exercice 2 :

On s'intéresse à la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 8}{(x-2)^2}$ définie sur $[-1 ; 1]$.

1) Etude des limites de f en -1 et en 1 :

$$\hookrightarrow \text{On a } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 7x + 8}{(x-2)^2}. \quad \text{Or } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 7x + 8) = (-1)^2 - 7(-1) + 8 = 16 \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x-2)^2 = (-1-2)^2 = (-3)^2 = 9. \text{ On en déduit immédiatement par quotient que :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{16}{9}.$$

La limite de f en -1 est donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{16}{9}$.

$$\hookrightarrow \text{On a de même } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 8}{(x-2)^2}. \quad \text{Or } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 7x + 8) = (1)^2 - 7(1) + 8 = 2 \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-2)^2 = (1-2)^2 = (-1)^2 = 1. \text{ On en déduit que } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{1} = 2.$$

La limite de f en 1 est donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

b) Détermination de la dérivée de la fonction f :

On pose $u(x) = x^2 - 7x + 8$ et $v(x) = (x-2)^2$. Les fonctions u et v sont alors dérivables sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ et on a vite :

$$u'(x) = 2x - 7 \text{ et } v'(x) = 2(x-2)'(x-2) = 2(1)(x-2) = 2(x-2) \text{ et } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

NOTE : Dans le calcul de la dérivée v' de la fonction v , on a utilisé la formule très générale suivante $(u^n)' = nu' u^{n-1}$. Si vous n'avez pas étudié cette formule en cours il faut commencer par développer $v(x)$ puis dériver l'écriture obtenue (développée). On a alors instantanément :

$$v(x) = (x-2)^2 = x^2 - 2(x)(2) + (2)^2 = x^2 - 4x + 4 \quad (\text{il faut réviser les identités remarquables étudiés en brevet du collège}).$$

On dérive $v(x) = x^2 - 4x + 4$ et on obtient alors $v'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$ (par factorisation par 2).

La formule $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ déjà utilisée dans l'exercice 1 nous donne

rapidement :

$$f'(x) = \frac{(2x-7)(x-2)^2 - (x^2-7x+8)[2(x-2)]}{[(x-2)^2]^2} = \frac{(2x-7)(x-2)(x-2) - 2(x-2)(x^2-7x+8)}{(x-2)^4}.$$

On factorise au numérateur par $(x-2)$ et on obtient alors :

$$f'(x) = \frac{(x-2)[(2x-7)(x-2) - 2(x^2-7x+8)]}{(x-2)^4}.$$

En développant maintenant le terme entre crochets on finit de plus en plus vite :

$$f'(x) = \frac{(x-2)[2x^2 - 4x - 7x + 14 - 2x^2 + 14x - 16]}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)(3x-2)}{(x-2)^4}.$$

La dérivée de la fonction f est donc $f'(x) = \frac{(x-2)(3x-2)}{(x-2)^4}$.

c) Etude du signe de la dérivée :

Pour tout $x \in [-1; 1]$, on a $(x-2)^4 > 0$ car il s'agit d'une puissance paire (un carré réel est toujours positif ou nul). Donc $f'(x) = \frac{(x-2)(3x-2)}{(x-2)^4}$ a le même signe que son numérateur $(x-2)(3x-2)$. Nous allons donc précisément étudier le signe de ce numérateur sur $[-1; 1]$.

Or $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ et $3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$.

On a donc le tableau de signe suivant :

x	-1	$\frac{2}{3}$	1
Signe de $x-2$	-		-
Signe de $3x-2$	-	0	+
Signe de : $(x-2)(3x-2)$ ou de $f'(x)$	+		-

d) Tableau de variation de la fonction f :

On utilise le théorème du sens de variation. D'après le tableau de signe précédent, la fonction f est croissante sur $[-1; \frac{2}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{2}{3}; 1]$. Rappelons que d'après la question a), on a

$$f(-1) = \frac{16}{9} \text{ et } f(1) = 2 \text{ et on a aussi } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{2}{3}\right) + 8}{\left(\frac{2}{3} - 2\right)^2} = \frac{\frac{4}{9} - \frac{14}{3} + 8}{\left(\frac{2}{3} - \frac{6}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{9} - \frac{42}{9} + \frac{72}{9}}{\left(\frac{2-6}{3}\right)^2}$$

$$\text{Ce qui nous donne alors } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4 - 42 + 72}{\left(\frac{-4}{3}\right)^2} = \frac{34}{\frac{16}{9}} = \frac{34}{9} \times \frac{9}{16} = \frac{34 \times 9}{9 \times 16} = \frac{34}{16} = \frac{2 \times 17}{2 \times 8} = \frac{17}{8}$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	-1	$\frac{2}{3}$	1
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	$\frac{16}{9}$	$\frac{17}{8}$	2

e) Rappelons que l'équation réduite de la tangente T à la courbe représentative C_f d'une fonction f en son point d'abscisse a est donnée par la formule extrêmement classique suivante :

$$T : y = f'(a)(x - a) + f(a) \quad (\text{cette formule est à bien retenir, attention et vite}).$$

↳ L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 s'écrit alors $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ avec $a=0$.

On a donc $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

$$\text{Or } f(0) = \frac{(0)^2 - 7(0) + 8}{(0 - 2)^2} = \frac{8}{(-2)^2} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{(0 - 2)(3 \times 0 - 2)}{(0 - 2)^4} = \frac{(-2)(-2)}{(-2)^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

On revient à la charge dans la formule de la tangente : $y = \frac{1}{4}(x - 0) + 2$ ou $y = \frac{1}{4}x + 2$.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donc $y = \frac{1}{4}x + 2$.

↳ On recommence vite : L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 s'écrit alors $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ avec $a=1$.

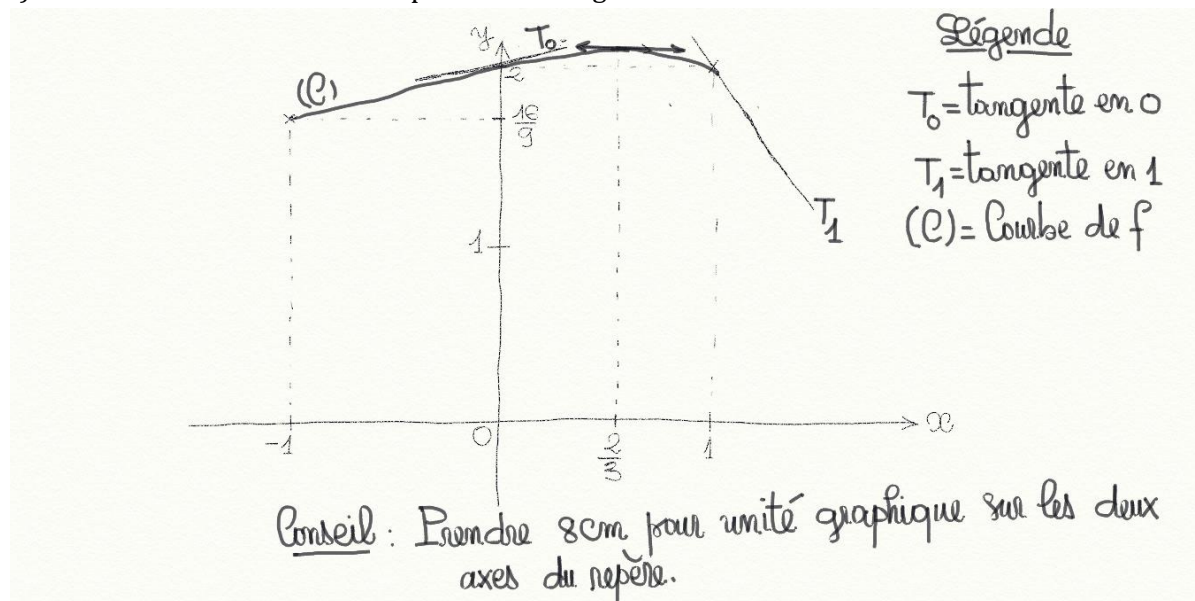
On a donc $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

$$\text{Or } f(1) = 2 \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{(1 - 2)(3 \times 1 - 2)}{(1 - 2)^4} = \frac{(-1)(1)}{(-1)^4} = \frac{-1}{1} = -1.$$

En revenant dans la formule précédente on obtient alors $y = -1(x - 1) + 2$ ou $y = -x + 1 + 2$.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donc $y = -x + 3$.

f) On obtient le tracé suivant d'après les renseignements fournis dans le tableau de variation.



NOTE : Je suis vraiment désolé car j'ai dessiné la courbe avec ma tablette graphique pour laquelle je n'ai pas de graduation et pas de précision non plus pour tracer des droites. Donc ce graphique n'est pas très soigné.

Je te laisse donc la redessiner sur un papier millimétré : je te recommande alors de prendre 8 cm pour unité graphique (l'énoncé n'en indique pas) et n'hésite pas à compléter le tableau de valeurs suivants pour disposer des points nécessaires aux différents tracés :

↳ Pour le tracé de la courbe C

x	-1	-1/2=-0,5	0	1/2=0,5	2/3	1
f(x)						

↳ Pour le tracé de la tangente T₀ en 0

x	0	1/2=0,5	1
$y = \frac{1}{4}x + 2$	2	17/8=2,125	9/4=1,25

↳ Pour le tracé de la tangente T₁ en 1

x	0	1/2=0,5	1
$y = -x + 3$	2	5/2=2,5	2

Je te laisse donc compléter le premier tableau puis exécuter les tracés (sur papier millimétré comme l'énoncé l'impose) et n'hésite pas à m'en faire part, si une difficulté se soulève. Nous continuons évidemment !

g) Il s'agit d'étudier suivant les valeurs de m, les solutions de l'équation du second degré :

$$(1 - m)x^2 + (4m - 7)x + 8 - 4m = 0$$

NOTE : Cette question est mal posée car les questions précédentes et notamment le graphique, ne permettent pas de déterminer les solutions de cette équation (comme l'énoncé le demande). Seul le nombre de solutions peut être déterminé à partir des questions précédentes et plus précisément à partir du graphique.

Seul le calcul imposant l'intervention du discriminant pourra permettre de déterminer les solutions de l'équation et cela imposerait de quitter le programme (car les techniques employées dépassent les limites du programme). En conséquence je ne présente pas ce calcul.

La bonne formulation de la question est alors la suivante :

g) bis) Déterminer graphiquement (ou en utilisant les questions précédentes) et suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $(1 - m)x^2 + (4m - 7)x + 8 - 4m = 0$.

↳ Soit $x \in [-1 ; 1]$, alors x est solution de cette équation si et seulement si on a successivement :

$$(1 - m)x^2 + (4m - 7)x + 8 - 4m = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx^2 + 4mx - 7x + 8 - 4m = 0 \text{ (par développement et suppression des parenthèses)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 8 = mx^2 - 4mx + 4m \text{ (en transférant les termes contenant m dans le membre de droite et on change évidemment les signes de ces termes)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 8 = (x^2 - 4x + 4)m \text{ (en mettant m en facteur dans le second membre)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 7x + 8}{x^2 - 4x + 4} = m$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 7x + 8}{(x - 2)^2} = m \text{ (en remarquant que } x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \text{ d'après l'identité remarquable)}$$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ étudié en brevet de collège : Révisez-les !)

$$\Leftrightarrow f(x) = m \text{ (en remarquant que } f(x) = \frac{x^2 - 7x + 8}{(x - 2)^2} \text{ par définition).}$$

L'équation $(1 - m)x^2 + (4m - 7)x + 8 - 4m = 0$ est donc équivalente à l'équation $f(x) = m$ dont les solutions correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe C de la fonction f avec la droite horizontale d'équation $y=m$.

Il devient alors extrêmement facile de déterminer graphiquement (c'est-à-dire à l'aide du graphique précédent) le nombre de solutions de l'équation. Pour cela il suffit de glisser une règle horizontalement (la règle doit rester horizontale) de bas en haut et de regarder le nombre de fois qu'elle coupe la courbe C : ce nombre correspond alors au nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ et par équivalence, au nombre de solutions de l'équation :

$$(1 - m)x^2 + (4m - 7)x + 8 - 4m = 0$$

On voit alors facilement que :

↳ Si $m \in \left] -\infty; \frac{16}{9} \right[$, alors l'équation n'a aucune solution (la règle ne coupe pas la courbe) ;

↳ Si $m = \frac{16}{9}$, alors l'équation possède exactement une solution qui est d'ailleurs -1 ;

↳ Si $m \in \left] \frac{16}{9}; 2 \right[$, alors l'équation admet une seule solution (la règle coupe la courbe une seule fois) ;

↳ Si $m=2$, alors l'équation admet deux solutions dont l'une d'elles est 1 ;

↳ Si $m \in \left] 2; \frac{17}{8} \right[$, alors l'équation admet deux solutions ;

↳ Si $m = \frac{17}{8}$, alors l'équation possède une unique solution qui est d'ailleurs $\frac{2}{3}$.

↳ Enfin si $m \in \left] \frac{17}{8}; +\infty \right[$, alors l'équation n'a pas de solutions.

-----FIN DE L'EXERCICE 2

Exercice 3 :

On donne l'encadrement $1,731 < \sqrt{3} < 1,732$

UN PETIT RAPPEL DES REGLES : ↳ Les inégalités ne changent pas si on ajoute ou on soustrait un même nombre à chacun de ses membres ;

↳ Les inégalités ne changent pas si on multiplie chaque membre par un même nombre positif ;

↳ Les inégalités s'inversent si on multiplie chaque membre par un nombre négatif ;

↳ On peut multiplier membre à membre deux inégalités dans lesquelles tous les membres sont positifs.

MISE EN GARDE : On ne divise jamais deux inégalités.

a) Il s'agit d'encadrer $Y = \frac{3 + \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}}$

↳ Comme $1,731 < \sqrt{3} < 1,732$, il vient en ajoutant 3 aux différents membres de ces inégalités :

$$3 + 1,731 < 3 + \sqrt{3} < 3 + 1,732.$$

$$\text{D'où } 4,731 < 3 + \sqrt{3} < 4,732 \quad (1)$$

↳ On a $1,731 < \sqrt{3} < 1,732$; en multipliant par -1 , il vient très facilement :

$-1,731 > -\sqrt{3} > -1,732$; c'est-à-dire $-1,732 < -\sqrt{3} < -1,731$. En ajoutant maintenant 4 on obtient $4 - 1,732 < 4 - \sqrt{3} < 4 - 1,731$.

D'où $2,268 < 4 - \sqrt{3} < 2,269$ (2).

La fonction inverse étant décroissante, on obtient en inversant les inégalités (2) ci-dessus (c'est-à-dire en passant aux inverses) : $\frac{1}{2,268} > \frac{1}{4 - \sqrt{3}} > \frac{1}{2,269}$; ce qui donne alors :

$$\frac{1}{2,269} < \frac{1}{4 - \sqrt{3}} < \frac{1}{2,268} \quad (3).$$

En multipliant enfin membre à membre les inégalités (1) et (3) on obtient alors :

$$4,731 \times \frac{1}{2,269} < (3 + \sqrt{3}) \times \frac{1}{4 - \sqrt{3}} < 4,732 \times \frac{1}{2,268} \text{ ou encore } \frac{4,731}{2,269} < \frac{3 + \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} < \frac{4,732}{2,268}.$$

On a donc l'encadrement $\frac{4,731}{2,269} < Y < \frac{4,732}{2,268}$ ou encore $2,085 < Y < 2,087$

b) \hookrightarrow On commence par simplifier l'écriture de Y : en multipliant par le conjugué du dénominateur il vient de plus en plus vite :

$$Y = \frac{3 + \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})}{(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})} = \frac{12 + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{(4)^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{12 + 7\sqrt{3} + 3}{16 - 3} = \frac{15 + 7\sqrt{3}}{13}.$$

On a donc simplifié $Y = \frac{15 + 7\sqrt{3}}{13}$.

\hookrightarrow On encadre Y en utilisant cette dernière écriture comme l'énoncé nous l'indique. Or on a :

$1,731 < \sqrt{3} < 1,732$; donc en multipliant par 7 (positif) on obtient $7 \times 1,731 < 7 \times \sqrt{3} < 7 \times 1,732$.

Ce qui donne $12,117 < 7\sqrt{3} < 12,124$. On ajoute maintenant 15 à ces inégalités, il vient :

$12,117 + 15 < 15 + 7\sqrt{3} < 12,124 + 15$; d'où $27,117 < 15 + 7\sqrt{3} < 27,124$. En divisant ces

inégalités par 13 (c'est-à-dire en les multipliant par $\frac{1}{13}$ qui est positif) on obtient finalement :

$$\frac{27,117}{13} < \frac{15 + 7\sqrt{3}}{13} < \frac{27,124}{13} \text{ ce qui donne enfin l'encadrement } 2,085 < Y < 2,087.$$

c) Conclusion : on retrouve le même encadrement.

-----FIN DE L'EXERCICE 3

Exercice 4 :

1) a) Résolution de l'équation $x^2 + 5x + 1 = 0$.

\hookrightarrow Le discriminant de cette équation est $\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(1)(1) = 25 - 4 = 21$.

\hookrightarrow On a $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2 \times 1} = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$$

Les solutions de l'équation sont donc $\frac{-5 - \sqrt{21}}{2}$ et $\frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$.

b) Résolution de l'équation $2x^2 - 10x + 3 = 0$.

\hookrightarrow Le discriminant de cette équation est $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(2)(3) = 100 - 24 = 76$.

\hookrightarrow On a $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{76}}{2 \times 2} = \frac{10 - \sqrt{4 \times 19}}{4} = \frac{10 - 2\sqrt{19}}{4} = \frac{5 - \sqrt{19}}{2}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{19}}{2}$$

Les solutions de l'équation sont donc $\frac{5 - \sqrt{19}}{2}$ et $\frac{5 + \sqrt{19}}{2}$.

c) Résolution de l'équation $-x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0$.

↳ Le discriminant de cette équation est $\Delta = b^2 - 4ac = (-\sqrt{3})^2 - 4(-1)(-1) = 3 - 4 = -1$.

↳ On a $\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solutions.

2) a) Résolution de l'inéquation $x^2 + 5x + 1 \leq 0$.

↳ On forme le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$	$\frac{-5 - \sqrt{21}}{2}$	$\frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$	$+\infty$	
$x^2 + 5x + 1$	+	0	-	0	+

RAPPEL : Le signe du coefficient a va à l'extérieur des racines et le signe inverse de a va entre les racines.

↳ L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 5x + 1 \leq 0$ est $S = \left[\frac{-5 - \sqrt{21}}{2} ; \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} \right]$.

b) Résolution de l'équation $2x^2 - 10x + 3 \geq 0$.

↳ On forme le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$	$\frac{5 - \sqrt{19}}{2}$	$\frac{5 + \sqrt{19}}{2}$	$+\infty$	
$2x^2 - 10x + 3$	+	0	-	0	+

↳ L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 5x + 1 \leq 0$ est alors :

$$S = \left] -\infty ; \frac{5 - \sqrt{19}}{2} \right] \cup \left[\frac{5 + \sqrt{19}}{2} ; +\infty \right[$$

c) Résolution de l'équation $-x^2 - \sqrt{3}x - 1 \geq 0$.

↳ On forme le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$	$+\infty$
$-x^2 - \sqrt{3}x - 1$	+	

NOTE : Il n'y a pas de racine et le signe est partout celui du coefficient a.

↳ L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 5x + 1 \leq 0$ est alors $S = \left] -\infty ; +\infty \right[= \mathbb{R}$.

-----FIN DE L'EXERCICE 4

Exercice 5 :

On s'intéresse aux fonctions $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(ch est le cosinus hyperbolique et sh est le sinus hyperbolique)

1) Nous sommes en train de démontrer que $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

L'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ nous donne immédiatement :

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = [\text{ch}(x) - \text{sh}(x)][\text{ch}(x) + \text{sh}(x)].$$

$$\text{Or } \text{ch}(x) - \text{sh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} = \frac{2e^{-x}}{2} = e^{-x} \text{ et de même}$$

$$\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x.$$

On en déduit alors que :

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = [\text{ch}(x) - \text{sh}(x)][\text{ch}(x) + \text{sh}(x)] = e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$$

On a donc montré que $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

NOTE : Cette égalité peut aussi se démontrer directement en calculant directement $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)$ à l'aide des identités remarquable jusqu'à trouver 1 (essayez de faire ce calcul !)

b) C'est rapide car on a par définition :

$$\text{sh}(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \text{ (on remplace juste } x \text{ par } 2x \text{ dans la formule de } \text{sh}(x)\text{). On a alors :}$$

$$\text{sh}(2x) = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} \text{ (on a appliqué l'identité remarquable}$$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; apprenez-les, attention !).

$$\text{On a alors } \text{sh}(2x) = (e^x - e^{-x}) \times \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \times \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = 2 \times \text{sh}(x) \times \text{ch}(x).$$

D'où $\text{sh}(2x) = 2\text{sh}(x)\text{ch}(x)$.

NOTE : Une autre façon de démontrer cette égalité est de lancer le calcul de $2\text{sh}(x)\text{ch}(x)$ jusqu'à trouver $\text{sh}(2x)$.

c) Nous lançons le calcul de $2\text{ch}^2(x) - 1$ jusqu'à trouver $\text{ch}(2x)$. On a tout de suite

$$2\text{ch}^2(x) - 1 = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{2(e^x + e^{-x})^2}{4} - 1 = \frac{(e^x)^2 + 2(e^x)(e^{-x}) + (e^{-x})^2}{2} - 1 \text{ (on a utilisé}$$

une identité remarquable, apprenez-les vraiment !)

$$\text{On a donc } 2\text{ch}^2(x) - 1 = \frac{e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x}}{2} - 1 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^0}{2} - 1 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{2} - \frac{2}{2}.$$

$$\text{D'où } 2\text{ch}^2(x) - 1 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - 2}{2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \text{ch}(2x).$$

On a bien montré que $\text{ch}(2x) = 2\text{ch}^2(x) - 1$.

d) Nous sommes en train de démontrer que $\text{sh}(x+y) = \text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y)$ (les . traduisent la multiplication). Il est plus simple de partir du second membre et de le calculer pour trouver le premier membre. C'est alors un calcul facile à conduire et il vient vite :

$$\text{sh}(x) \cdot \text{ch}(y) + \text{ch}(x) \cdot \text{sh}(y) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^y - e^{-y}}{2} ; \text{ ce qui donne :}$$

$$\text{sh}(x) \cdot \text{ch}(y) + \text{ch}(x) \cdot \text{sh}(y) = \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4}. \text{ En développant il}$$

vient alors très vite :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x) \cdot \operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x) \cdot \operatorname{sh}(y) &= \frac{e^x \cdot e^y + e^x \cdot e^{-y} - e^{-x} \cdot e^y - e^{-x} \cdot e^{-y}}{4} + \frac{e^x \cdot e^y - e^x \cdot e^{-y} + e^{-x} \cdot e^y - e^{-x} \cdot e^{-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} = \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4} = \frac{2(e^{(x+y)} - e^{-(x+y)})}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \operatorname{sh}(x) \cdot \operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x) \cdot \operatorname{sh}(y) = \frac{(e^{(x+y)} - e^{-(x+y)})}{2} = \operatorname{sh}(x+y).$$

On a bien montré que $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x) \cdot \operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x) \cdot \operatorname{sh}(y)$.

e) Démontrons que $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x) \cdot \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x) \cdot \operatorname{sh}(y)$. On se relance de la même manière que dans la question précédente. Nous avons :

$$\operatorname{ch}(x) \cdot \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x) \cdot \operatorname{sh}(y) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times \frac{e^y - e^{-y}}{2}; \text{ ce qui donne :}$$

$$\operatorname{ch}(x) \cdot \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x) \cdot \operatorname{sh}(y) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4}. \text{ En développant il}$$

vient alors très vite :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) \cdot \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x) \cdot \operatorname{sh}(y) &= \frac{e^x \cdot e^y + e^x \cdot e^{-y} + e^{-x} \cdot e^y + e^{-x} \cdot e^{-y}}{4} + \frac{e^x \cdot e^y - e^x \cdot e^{-y} - e^{-x} \cdot e^y + e^{-x} \cdot e^{-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} = \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4} = \frac{2(e^{(x+y)} + e^{-(x+y)})}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \operatorname{ch}(x) \cdot \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x) \cdot \operatorname{sh}(y) = \frac{(e^{(x+y)} + e^{-(x+y)})}{2} = \operatorname{ch}(x+y).$$

On a alors démontré que $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x) \cdot \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x) \cdot \operatorname{sh}(y)$.

-----FIN DE L'EXERCICE 5

Exercice 6 :

a) Résolution de l'équation $\ln|x+3| + \ln|x+5| = \ln 15$

↳ L'équation a un sens si et seulement si $\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ \text{et } x+5 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ \text{et } x \neq -5 \end{cases}$$

Donc on résout l'équation dans l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-3; -5\}$.

↳ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; -5\}$; alors x est solution de l'équation si et seulement si $\ln|x+3| + \ln|x+5| = \ln 15 \Leftrightarrow \ln(|x+3| \times |x+5|) = \ln 15$ (Rappel : $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ pour tous réels strictement positifs a et b)

$$\Leftrightarrow \ln(|(x+3)(x+5)|) = \ln 15$$

$$\Leftrightarrow |(x+3)(x+5)| = 15 \text{ (Rappel : } \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b)$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+5) = 15 \text{ ou } (x+3)(x+5) = -15 \text{ (Rappel : } |x| = a > 0 \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 15 = 15 \text{ ou } x^2 + 8x + 15 = -15 \text{ (par développement)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x = 0 \text{ ou } x^2 + 8x + 30 = 0 \text{ (par développement)}$$

↳ On résout d'abord l'équation $x^2 + 8x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x+8 = 0 \text{ (règle du produit nul)}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -8$$

↳ On résout maintenant l'équation $x^2 + 8x + 30 = 0$ (second degré)

Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(30) = 64 - 120 = -56$.

On a $\Delta < 0$ donc l'équation $x^2 - 8x + 30 = 0$ n'a pas de solution.

Les solutions de l'équation $\ln|x + 3| + \ln|x + 5| = \ln 15$ sont donc 0 et 8.

b) Résolution de l'équation $2^{2x} - 2^{x+1} = -1$

Cette équation peut aussi manifestement s'écrire $(2^x)^2 - 2 \times 2^x = -1$. En posant alors $y = 2^x$ l'équation s'écrit alors : $y^2 - 2y + 1 = 0$ (équation du second degré)

$$\Leftrightarrow (y - 1)^2 = 0 \quad (\text{identité remarquable})$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 1$$

Comme $y = 2^x$, on a alors $2^x = 1$; d'où en prenant les logarithmes :

$$\ln(2^x) = \ln 1 \text{ d'où } x \ln(2) = \ln 0 \text{ (car } \ln 1 = 0).$$

$$\text{On a alors } x = \frac{0}{\ln 2} = 0.$$

La solution de l'équation $2^{2x} - 2^{x+1} = -1$ est donc 0.

b) Résolution de l'équation $\ln(x + 2) + \ln(x + 6) > \ln 12$

L'inéquation a un sens (est définie) si et seulement si $x+2 > 0$ et $x+6 > 0$

$$\Leftrightarrow x > -2 \text{ et } x > -6$$

$$\Leftrightarrow x > -2.$$

↳ On résout donc l'inéquation sur l'ensemble de définition $D =]-2 ; +\infty[$.

↳ Soit maintenant $x \in D =]-2 ; +\infty[$, alors x est solution de l'inéquation si et seulement si

$$\ln(x + 2) + \ln(x + 6) > \ln 12$$

$$\Leftrightarrow \ln[(x + 2)(x + 6)] > \ln 12 \quad (\text{Rappel : } \ln a + \ln b = \ln(ab))$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x + 6) > 12 \quad (\text{on quitte les logarithmes } \ln \text{ de part et d'autre})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 12 > 12 \quad (\text{par développement})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x > 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 8) > 0$$

On doit faire un tableau de signe pour le produit $x(x + 8)$

x	$-\infty$	-8	0	$+\infty$	
Signe de x	-		0	+	
Signe de x-8	-	0	+	+	
Signe de X(x-8)	+	0	-	0	+

Don x est solution si et seulement si $x > -2$ et $(x < -8$ ou $x > 0) \Leftrightarrow x > 0$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $S =]0; +\infty[$

