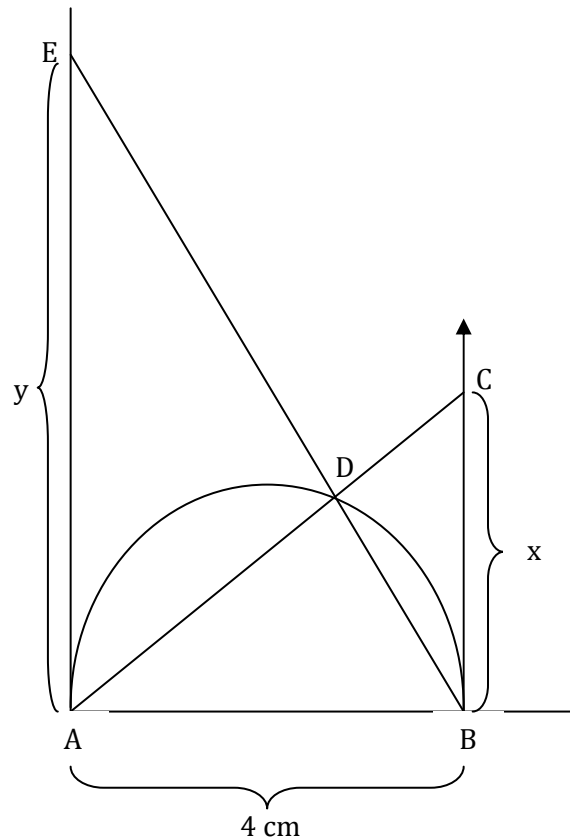


EXERCICE FALOA

Question 1 :

↳ On obtient la figure ci-dessous :



↳ On constate facilement que si on éloigne le point C du point B, c'est-à-dire si on augmente x , le point E se rapproche du point A, c'est-à-dire que $y=f(x)$ diminue. On peut donc formuler la conjecture suivante :

CONJECTURE : La fonction f est décroissante.

Question 2 :

C'est une conséquence du théorème de Pythagore.

↳ Comme le point D appartient au demi-cercle de diamètre $[A, B]$, le triangle DAB est rectangle en D. Il en va clairement de même des triangles BCD, DEC et DEA qui sont eux aussi tous les deux rectangles en D.

↳ Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles DAB et DEC rectangles en D fournit :

$AB^2 = DA^2 + DB^2$ et $CE^2 = DE^2 + DC^2$. On en déduit que :

$AB^2 + CE^2 = DA^2 + DB^2 + DE^2 + DC^2 = (DA^2 + DE^2) + (DB^2 + DC^2)$ par simple groupement de termes.

Or le même théorème de Pythagore appliqué cette fois-ci aux triangles DEA et BCD rectangles en D vient nous dire que $DA^2 + DE^2 = AE^2$ et $DB^2 + DC^2 = BC^2$. On a donc $AB^2 + CE^2 = AE^2 + BC^2$ qui est précisément l'égalité qu'il fallait démontrer.

Question 3 :

Il s'agit de calculer AE^2 ; BC^2 et CE^2 en fonction de x et y .

Comme par définition, $AE=y$ et $BC=x$, on a immédiatement $AE^2 = y^2$ et $BC^2 = x^2$.

Il reste alors à calculer CE^2 en fonction de x et y .

↳ Le théorème de Pythagore, appliqué au triangle DEC, rectangle en D, fournit vite :

$$CE^2 = DE^2 + DC^2 \quad (1)$$

Nous allons commencer par calculer les longueurs DE et DC.

1^{ère} méthode : On utilise l'aire du trapèze ABCE (c'est bien un trapèze car c'est un quadrilatère dont les côtés [B, C] et [A, E] sont parallèles et de longueurs différentes).

Rappelons que l'aire d'un trapèze de bases B et b et de hauteur h est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = \frac{(B + b) \times h}{2}.$$

Rappelons aussi que l'aire d'un triangle de base b et de hauteur h est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}.$$

↳ L'aire \mathcal{A}_{ABCE} du trapèze est donc $\mathcal{A}_{ABCE} = \frac{(BC + AE) \times AB}{2} = \frac{(x + y) \times 4}{2} = 2(x + y)$.

↳ Or l'aire \mathcal{A}_{ABCE} du trapèze ABCE est la somme des aires \mathcal{A}_{ABE} et \mathcal{A}_{BCE} des triangles ABE et BCE.

On a alors $\mathcal{A}_{ABCE} = \mathcal{A}_{ABE} + \mathcal{A}_{BCE}$ avec $\mathcal{A}_{ABE} = \frac{AB \times AE}{2} = \frac{4 \times y}{2} = 2y$ et $\mathcal{A}_{BCE} = \frac{BE \times DC}{2}$. On obtient

donc l'égalité $2(x + y) = 2y + \frac{BE \times DC}{2}$. On a alors $2y + \frac{BE \times DC}{2} = 2x + 2y$. Ce qui nous donne

$\frac{BE \times DC}{2} = 2x$. D'où $DC = \frac{4x}{BE}$. Or d'après le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle

BEA, rectangle en A, on a $BE^2 = AE^2 + AB^2 = 4^2 + y^2 = 16 + y^2$; donc $BE = \sqrt{16 + y^2}$. On en

déduit que $DC = \frac{4x}{BE} = \frac{4x}{\sqrt{16 + y^2}}$.

↳ De même, l'aire \mathcal{A}_{ABCE} du trapèze ABCE est la somme des aires \mathcal{A}_{ABC} et \mathcal{A}_{ACE} des triangles ABC

et ACE. On a alors $\mathcal{A}_{ABCE} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACE}$ avec $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times CB}{2} = \frac{4 \times x}{2} = 2x$ et $\mathcal{A}_{ACE} = \frac{AC \times DE}{2}$. On

obtient donc l'égalité $2(x + y) = 2x + \frac{AC \times DE}{2}$. On a alors $2x + \frac{AC \times DE}{2} = 2x + 2y$. Ce qui nous

donne $\frac{AC \times DE}{2} = 2y$. D'où $DE = \frac{4y}{AC}$. Or d'après le théorème de Pythagore appliqué dans le

triangle ABC, rectangle en B, on a $AC^2 = BA^2 + BC^2 = 4^2 + x^2 = 16 + x^2$; donc $AC = \sqrt{16 + x^2}$.

On en déduit que $DE = \frac{4y}{AC} = \frac{4y}{\sqrt{16 + x^2}}$.

↳ L'égalité $CE^2 = DE^2 + DC^2$ (1), nous donne finalement :

$$CE^2 = DE^2 + DC^2 = \left(\frac{4y}{\sqrt{16 + x^2}} \right)^2 + \left(\frac{4x}{\sqrt{16 + y^2}} \right)^2 = \frac{16x^2}{16 + y^2} + \frac{16y^2}{16 + x^2}.$$

On obtient donc bien l'expression demandée $CE^2 = \frac{16x^2}{16+y^2} + \frac{16y^2}{16+x^2}$.

Question 4 :

↳ Il s'agit enfin d'exprimer $y=f(x)$ en fonction de x .

L'égalité $AB^2 + CE^2 = AE^2 + BC^2$ démontrée dans la question ② peut alors s'écrire :

$$4^2 + \frac{16x^2}{16+y^2} + \frac{16y^2}{16+x^2} = y^2 + x^2 ; \text{ ce qui donne } 16 + \frac{16x^2}{16+y^2} - x^2 + \frac{16y^2}{16+x^2} - y^2 = 0 \text{ ou}$$

encore $16 + \left(\frac{16x^2}{16+y^2} - x^2\right) + \left(\frac{16y^2}{16+x^2} - y^2\right) = 0$. En passant au même dénominateur dans les

termes entre parenthèses, on obtient $16 + \frac{16x^2 - (16+y^2)x^2}{16+y^2} + \frac{16y^2 - (16+x^2)y^2}{16+x^2} = 0$. Ce qui

donne alors $16 - \frac{x^2y^2}{16+y^2} - \frac{x^2y^2}{16+x^2} = 0$. D'où $\frac{x^2y^2}{16+y^2} + \frac{x^2y^2}{16+x^2} = 16$; ce qui donne par

passage au même dénominateur dans le premier membre $\frac{x^2y^2(16+x^2) + x^2y^2(16+y^2)}{(16+x^2)(16+y^2)} = 16$.

En factorisant le numérateur par le terme x^2y^2 , on obtient $\frac{x^2y^2(32+x^2+y^2)}{(16+x^2)(16+y^2)} = 16$. On en

déduit que $x^2y^2(32+x^2+y^2) = 16(16+x^2)(16+y^2)$; ce qui donne, en développant le second

membre $x^2y^2(32+x^2+y^2) = 16(256+16y^2+16x^2+x^2y^2)$ ou encore, en développant

partiellement dans le second membre $x^2y^2(32+x^2+y^2) = 16(256+16y^2+16x^2) + 16x^2y^2$.

D'où $x^2y^2(32+x^2+y^2) - 16x^2y^2 = 16(256+16y^2+16x^2)$. En factorisant alors le membre de gauche par x^2y^2 et le membre de droite par 16, il vient alors :

$$x^2y^2(32+x^2+y^2-16) = 16 \times 16(16+x^2+y^2) ; \quad \text{ou} \quad \text{encore}$$

$$x^2y^2(16+x^2+y^2) = 256(16+x^2+y^2) ; \quad \text{ce} \quad \text{qui} \quad \text{donne}$$

$$x^2y^2(16+x^2+y^2) - 256(16+x^2+y^2) = 0.$$

En factorisant alors par le terme $16+x^2+y^2$, on obtient $(16+x^2+y^2)(x^2y^2-256) = 0$. Or le terme $16+x^2+y^2$ n'est jamais nul (car c'est une somme de trois carrés). On en déduit donc

que $x^2y^2-256 = 0$; d'où $y^2 = \frac{256}{x^2}$ et comme y est un réel positif (car c'est une distance), on

$$\text{obtient finalement } y = \sqrt{\frac{256}{x^2}} = \sqrt{\frac{16^2}{x^2}} ; \text{ d'où } y = \frac{16}{x}.$$

On a donc $f(x) = \frac{16}{x}$. Et nous sommes maintenant capable de justifier la conjecture énoncée dans la question 1.

Preuve de la conjecture : Sens de variation de la fonction f

La fonction inverse $u: x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ (fonction usuelle) et on a $f=16u$.

Comme 16 est un réel positif, la fonction f est aussi décroissante sur $]0, +\infty[$.

Cela démontre bien la conjecture faite au début de l'exercice.

2^{ème} méthode de calcul de CE² : On utilise le théorème de Thalès pour calculer les longueurs DE et DC en fonction de x et y.

⇒ Le point D appartient au segment [A, C] ;

⇒ Le point D appartient au segment [B, E] ;

⇒ Les droites (AE) et (BC) sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires (AB).

D'après le théorème de Thalès s'applique alors et donne $\frac{DE}{DB} = \frac{DA}{DC} = \frac{AE}{BC}$. On a alors

$$\frac{DE}{DB} = \frac{DA}{DC} = \frac{y}{x}. \text{ D'où } DB = \frac{x}{y} \times DE \text{ et } DA = \frac{y}{x} \times DC.$$

↳ Or on a $DE+DB=BE$ (car $D \in [B, E]$), avec $DB = \frac{x}{y} \times DE$ et $BE = \sqrt{16 + y^2}$ (déjà obtenu par application du théorème de Pythagore dans le triangle BEA rectangle en A). On a donc :

$$DE + \frac{x}{y} \times DE = \sqrt{16 + y^2} \quad \text{ou encore} \quad \left(1 + \frac{x}{y}\right)DE = \sqrt{16 + y^2}. \quad \text{Ce qui donne}$$

$$\left(\frac{x+y}{y}\right)DE = \sqrt{16 + y^2}. \text{ D'où } DE = \frac{y\sqrt{16 + y^2}}{x+y}.$$

↳ De même, on a $DC+DA=AC$ (car $D \in [A, C]$), avec $DA = \frac{y}{x} \times DC$ et $AC = \sqrt{16 + x^2}$ (déjà obtenu par application du théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B). On a donc :

$$DC + \frac{y}{x} \times DC = \sqrt{16 + x^2} \quad \text{ou encore} \quad \left(1 + \frac{y}{x}\right)DC = \sqrt{16 + x^2}. \quad \text{Ce qui donne}$$

$$\left(\frac{x+y}{x}\right)DC = \sqrt{16 + x^2}. \text{ D'où } DC = \frac{x\sqrt{16 + x^2}}{x+y}.$$

↳ Cela étant, on a alors l'égalité $CE^2 = DE^2 + DC^2$ (1), qui nous donne finalement :

$$CE^2 = DE^2 + DC^2 = \left(\frac{y\sqrt{16 + y^2}}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{16 + x^2}}{x+y}\right)^2 = \frac{y^2(16 + y^2)}{(x+y)^2} + \frac{x^2(16 + x^2)}{(x+y)^2}.$$

On obtient cette fois-ci l'expression $CE^2 = \frac{y^2(16 + y^2) + x^2(16 + x^2)}{(x+y)^2}$.

↳ Il s'agit enfin d'exprimer y=f(x) en fonction de x.

L'égalité $AB^2 + CE^2 = AE^2 + BC^2$ démontrée dans la question précédente peut alors s'écrire cette fois-ci :

$$4^2 + \frac{y^2(16 + y^2) + x^2(16 + x^2)}{(x+y)^2} = y^2 + x^2 ; \text{ ce qui donne alors :}$$

$$16 + \frac{y^2(16 + y^2) + x^2(16 + x^2)}{(x+y)^2} = x^2 + y^2. \text{ En multipliant cette égalité par } (x+y)^2 \text{ on obtient :}$$

$$16(x+y)^2 + y^2(16 + y^2) + x^2(16 + x^2) = (x^2 + y^2)(x+y)^2.$$

En développant cette égalité, on obtient alors successivement :

$$16(x^2 + 2xy + y^2) + 16y^2 + y^4 + 16x^2 + x^4 = (x^2 + y^2)(x^2 + 2xy + y^2) ;$$

$$16x^2 + 32xy + 16y^2 + 16y^2 + y^4 + 16x^2 + x^4 = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2xy) ;$$

$$32x^2 + 32xy + 32y^2 + y^4 + x^4 = (x^2 + y^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2) ;$$

$$32x^2 + 32y^2 + 32xy + y^4 + x^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2xy(x^2 + y^2) ;$$

$$32(x^2 + y^2) + 32xy = 2x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) , \text{ on a éliminé les termes } x^4 + y^4 ;$$

$$\text{D'où } 32(x^2 + y^2) - 2xy(x^2 + y^2) + 32xy - 2x^2y^2 = 0.$$

En factorisant les deux premiers termes par $2(x^2 + y^2)$ et les deux derniers par $2xy$, il vient :

$$2(x^2 + y^2)(16 - xy) + 2xy(16 - xy) = 0 . \text{ En factorisant maintenant par } 2(16 - xy), \text{ il vient vite :}$$

$$2(x^2 + y^2 + xy)(16 - xy) = 0 .$$

Or le terme $x^2 + y^2 + xy$ n'est jamais nul car x et y sont des réels positifs (en tant que

longueurs). On en déduit que $16 - xy = 0$; d'où $y = \frac{16}{x}$.