PLANCHE-MATH12- Puissances et racines carrées

LES OBJECTIFS

Les objectifs majeurs de ce chapitre sont les suivants :

- ❒ **Savoir calculer une puissance avec une calculatrice.**
- ❒ **Savoir calculer une racine carrée avec une calculatrice.**
- ❒ **Savoir mettre un nombre en écriture scientifique.**

I. Définitions des puissances

Soit *a* un nombre quelconque et *m* un entier naturel non nul. On note a^m le nombre défini par :

$$a^m = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \ fois}$$

■ **Le nombre a^m est le produit du nombre *a* par lui-même et *m* fois.**

■ **Le nombre a^m se lit « *a* puissance *m* » ou « *a* exposant *m* ».**

■ **Par convention on admet que $a^0 = 1$ (tout nombre élevé à la puissance 0 donne 1).**

REMARQUES : ■ Le nombre a^2 se lit aussi « *a* au carré » ; et le nombre a^3 se lit aussi « *a* au cube ».

■ **On a toujours $a^1 = a$ (donc si un nombre est écrit sans puissance, on considère qu'il est à la puissance 1).**

EXEMPLES :

❒ $2^3 = 2 \times 2 \times 2 \longleftarrow$ **(Ecriture sous forme de produit)**

❒ **On a** $3^7 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{7 \ facteurs}$.

❒ **On a aussi** $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^{10}$ **(le nombre de 5 qui se multiplient est 10).**

MISE EN GARDE

Il ne faudra pas confondre le nombre a^m avec le nombre $a \times m$.

Par exemple $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$; alors que $2 \times 3 = 6$ (on voit bien que les résultats sont différents).

EXERCICE DE COMPREHENSION : APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°1 :

① **Ecrire les nombre** $a=3^5$ **et** $b=7^8$ **sous forme de produit (le calcul n'est pas demandé).**
② **Ecrire les deux nombres suivants** $c=5\times5\times5\times5$ **et** $d=2\times3\times2\times2\times3\times3\times2\times2\times2\times3\times3\times3\times2\times3\times3\times3$ **sous forme de puissances.**

RAPPEL :

La puissance affectée à chaque nombre correspond au nombre de fois que ce nombre figure dans le produit.

① **On a donc** $a=3^5=3\times3\times3\times3\times3$ **et de même** $b=7^8=7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7$.

② **Nous avons** $c=\underbrace{5\times5\times5\times5}_{4\ \ fois}=5^4$ **et de la même façon, en groupant les facteurs identiques (les 2 et les 3) on obtient :**

$$d=\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}_{7\ \ facteurs}\times\underbrace{3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3}_{9\ \ facteurs}=2^7\times3^9.$$

II. Calcul d'une puissance à l'aide d'une calculatrice

Un des objectifs de ce chapitre est de savoir calculer une puissance à l'aide d'une calculatrice. Il faut donc s'assurer de disposer d'une calculatrice munie des fonctions adéquates.

☞ **Pour calculer le nombre** a^m **(c'est-à-dire « *a* puissance *m* ») il faut taper (selon votre calculatrice) la combinaison des touches suivante :**

$\boxed{\underbrace{a}_{Valeur\ de\ a}\quad \underbrace{x^y}_{Touche\ de\ puissance}\quad \underbrace{m}_{Valeur\ de\ l'exposant}}$ ou selon la calculatrice $\boxed{\underbrace{a}_{Valeur\ de\ a}\quad \underbrace{\wedge}_{Touche\ de\ puissance}\quad \underbrace{m}_{Valeur\ de\ l'exposant}}$

Ou encore $\boxed{\underbrace{a}_{Valeur\ de\ a}}$ $\underbrace{\text{y}^{\blacksquare}}_{\text{Touche de puissance}}$ $\boxed{\underbrace{m}_{Valeur\ de\ l'exposant}}$ **suivie de la touche = (EGAL).**

EXEMPLES : ☞ **Calculer le nombre** 2^7 **à l'aide de votre calculatrice.**

On tape par exemple la combinaison 2 x^y **7 puis = ; on trouve alors** $2^7=128$.

☞ **Calculer le nombre** $3{,}5^4$ **à l'aide de votre calculatrice.**

On tape par exemple la combinaison 3,5 x^y 4 puis = ; qui nous donne alors $3{,}5^4 = 150{,}0625$.

EXERCICE DE COMPREHENSION : APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°2 :

A VOS CALCULATRICES !

Calculer les nombres suivants en arrondissant le résultat au dixième.

① $a = 4{,}5^4$ **;**

② $b = 1{,}8^3$ **;**

③ $c = 3{,}6^5$**.**

NOTE : Il est important que cet exercice soit fait pour contrôler les fonctionnalités de votre calculatrice et se familiariser avec les touches.

① Avec les techniques qui viennent d'être expliquées on trouve : $a = 4{,}5^4 = 410{,}0625$**, et par suite** $a \approx 410{,}1$ **(en arrondissant au dixième comme l'énoncé le précise).**

② Nous avons facilement $b = 1{,}8^3 = 5{,}832$**, et par suite** $b \approx 5{,}8$ **(en arrondissant au dixième).**

③ On a $c = 3{,}6^5 = 604{,}66176$**, et par suite** $c \approx 604{,}7$ **(en arrondissant au dixième).**

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°3 :

On donne les nombres $R = 8{,}6$ **et** $\pi = 3{,}14$**.**

① Calculer alors $V = \dfrac{2 \times \pi \times R^3}{3}$ **(on donnera le résultat avec 6 chiffres dans la partie décimale).**

② Arrondissez le résultat de *V* au centième.

NOTE : Il s'agit d'un exercice d'application de formule ; on doit remplacer dans la formule chaque grandeur par sa valeur puis taper l'opération à la calculatrice.

① On obtient sans difficulté $V = \dfrac{2 \times 3{,}14 \times 8{,}6^3}{3} = 1331{,}477227$**.**

② On a l'arrondi $V \cong 1331{,}48$**.**

III. Propriétés des puissances

Les puissances possèdent des propriétés très spécifiques permettant des calculs rapides.

☞ REGLE N°1 (PRODUIT DE DEUX PUISSANCES)

$$\underbrace{a^m \times a^p}_{C'est\ le\ même\ nombre\ a} = \underbrace{a^{m+p}}_{On\ additionne\ les\ puissances}.$$

EXEMPLE : Calculons les nombres $x = 3^4 \times 3^2$ et $y = 7^3 \times 7^2$ **en donnant les résultats sous forme de puissances.**

La règle nous donne directement $x = 3^4 \times 3^2 = \underbrace{3^{4+2}}_{On\ additionne\ les\ puissances} = 3^6$ **et de même** $y = 7^3 \times 7^2 = 7^{3+2} = 7^5$.

☞ REGLE N°2 (QUOTIENT DE DEUX PUISSANCES)

$$\underbrace{\frac{a^m}{a^p}}_{C'est\ le\ même\ nombre\ a} = \underbrace{a^{m-p}}_{On\ soustrait\ les\ puissances}.$$

EXEMPLE : Calculons les nombres $x = \frac{5^8}{5^6}$ et $y = \frac{3^{14}}{3^8}$ **en donnant les résultats sous forme de puissances.**

On applique directement la règle qui nous donne $x = \frac{5^8}{5^6} = \underbrace{5^{8-6}}_{On\ soustrait\ les\ puissances} = 5^2$

et de même $y = \frac{3^{14}}{3^8} = 3^{14-8} = 3^6$.

☞ REGLE N°3 (PUISSANCE D'UNE PUISSANCE)

$$\underbrace{\left(a^m\right)^p}_{On\ élève\ une\ puissance\ à\ une\ autre\ puissance} = \underbrace{a^{m \times p}}_{On\ multiplie\ les\ puissances}.$$

EXEMPLE : Calculons les nombres $x = \left(2^3\right)^4$ et $y = \left(5^2\right)^3$ **en donnant les résultats sous forme de puissances.**

La règle conduit à : $x = \left(2^3\right)^4 = \underbrace{2^{3\times4}}_{On\ multiplie\ les\ puissances} = 2^{12}$ **et de même** $y = \left(5^2\right)^3 = 5^{2\times3} = 5^6$.

☞ REGLE N°4 (PUISSANCE D'UN PRODUIT)

$$\underbrace{(a \times b)^m}_{On\ élève\ un\ produit\ à\ une\ puissance} = \underbrace{a^m \times b^m}_{On\ distribue\ les\ puissances}.$$

EXEMPLE : On peut écrire $6^4 = \underbrace{(2\times3)^4}_{car\ 6=2\times3} = \underbrace{2^4 \times 3^4}_{En\ appliquant\ la\ règle}$.

☞ **REGLE N°5 (PUISSANCE D'UN QUOTIENT)**

$$\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)^m}_{On\ élève\ un\ quotient\ à\ une\ puissance} = \underbrace{\frac{a^m}{b^m}}_{On\ distribue\ les\ puissances}.$$

EXEMPLE : On peut écrire $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \underbrace{\frac{2^5}{3^5}}_{En\ appliquant\ la\ règle}$.

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°4 :

Calculer chacun des nombres suivants sous forme de puissances :

① $x = 3^2 \times 3^5$;

② $y = 2^6 \times 2$;

③ $z = \frac{5^9}{5^7}$;

④ $t = \frac{(2^3)^4 \times 2^5}{2^{15} \times 2}$.

① **Nous avons avec la règle n°1 :** $x = 3^2 \times 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$.

② **La même règle nous donne :** $y = 2^6 \times 2 = \underbrace{2^6 \times 2^1}_{car\ 2=2^1} = 2^{6+1} = 2^7$.

③ **En appliquant le règle n°2, on obtient facilement :** $z = \frac{5^9}{5^7} = 5^{9-7} = 5^2$.

④ **En appliquant les trois premières règles, on obtient successivement :**

$$t = \frac{(2^3)^4 \times 2^5}{2^{15} \times 2} = \frac{2^{3\times4} \times 2^5}{2^{15} \times 2^1} = \frac{2^{12} \times 2^5}{2^{15+1}} = \frac{2^{12+5}}{2^{16}} = \frac{2^{17}}{2^{16}} = 2^{17-16} = 2^1 = 2.$$

IV. Les puissances de 10 et écriture scientifique d'un nombre décimal

1. Propriétés des puissances de 10

Les puissances de 10 possèdent des propriétés particulières que nous récapitulons dans le tableau ci-dessous.

Soit *m* un entier naturel non nul.

☞ **REGLE N°1 (ECRITURE DECIMALE DE 10^m)**

$$10^m = 1\underbrace{000\cdots0}_{m\ zéros}.$$

NOTE : Cette règle permet de calculer instantanément le nombre 10^m.

Par exemple $10^2 = 1\underbrace{00}_{2\ zéros}$; $10^3 = 1\underbrace{000}_{3\ zéros}$; $10^6 = 1\underbrace{000000}_{6\ zéros}$

☞ REGLE N°2 (ECRITURE DECIMALE DE 10^{-m})

$$10^{-m} = \frac{1}{10^m} = 0,\underbrace{000\cdots01}_{m\ chiffres}$$ **(il y a au total *m* zéros avant le 1)**

NOTE : Cette règle permet de calculer instantanément le nombre 10^{-m}.

Par exemple $10^{-1} = 0,\underbrace{1}_{1\ chiffre}$ **;** $10^{-2} = 0,\underbrace{01}_{2\ chiffres}$ **;** $10^{-4} = 0,\underbrace{0001}_{4\ chiffres}$ **;** $10^{-6} = 0,\underbrace{000001}_{6\ chiffres}$**.**

☞ REGLE N°3 (EFFET DE LA MULTIPLICATION D'UN NOMBRE DECIMAL PAR 10^m)

Pour multiplier un nombre décimal par 10^m, il suffit de décaler sa virgule de m chiffres vers la droite et à la fin de la partie décimale, chaque décalage se traduit par l'ajout d'un zéro.

EXEMPLES : $1,562\times10^2 = \underbrace{156,2}_{On\ a\ décalé\ la\ virgule\ de\ 2\ chiffres\ à\ droite}$ **;** $0,00025\times10^6 = 250$ **;** $12\times10^3 = 12000$**.**

☞ REGLE N°4 (EFFET DE LA MULTIPLICATION D'UN NOMBRE DECIMAL PAR 10^{-m})

Pour multiplier un nombre décimal par 10^{-m}, il suffit de décaler sa virgule de m chiffres vers la gauche et en début de la partie entière, chaque décalage se traduit par l'ajout d'un zéro.

EXEMPLES : $154,3\times10^{-2} = \underbrace{1,543}_{On\ a\ décalé\ la\ virgule\ de\ 2\ chiffres\ à\ gauche}$ **;** $0,00025\times10^6 = 250$ **;** $15\times10^{-5} = 0,00015$**.**

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°5 :

Donner l'écriture décimale de chacun des nombres suivants :

① $x = 10^8$ **;**
② $y = 10^{-4}$ **;**
③ $z = 0,038\times10^5$ **;**
④ $t = 5400\times10^{-3}$**.**

① La règle n°1 nous donne aussitôt $x = 100000000$ **(on ajoute 8 zéros après le 1).**

② La règle n°2 s'applique et donne $y = 0,0001$ **(On met 4 zéros avant le 1).**

③ On décale la virgule de 5 chiffres vers la droite et on ajoute éventuellement des zéros au bout de la partie décimale ; ce qui donne $z = 380$**.**

④ Il faut décaler la virgule de 3 chiffres vers la droite ; on a alors $t = 5,4$**.**

(NOTE : Les zéros terminaux après la virgule peuvent être supprimés).

2. Ecriture scientifique d'un nombre décimal

Un des objectifs de ce chapitre est de savoir mettre un nombre décimal positif en écriture scientifique.

☞ **THEOREME : Tout nombre décimal positif *x* peut s'écrire de façon unique sous la forme**

$$x = a \times 10^{m}$$

où m est un entier et *a* un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$**.**

DEFINITION : L'écriture $x = a \times 10^{m}$ **s'appelle écriture scientifique du nombre décimal *x*.**

REMARQUE FONDAMENTALE : L'écriture scientifique ne doit comporter qu'un seul chiffre non nul (c'est-à-dire pas zéro) avant la virgule. Donc il y a une seule position possible pour la virgule (après le premier chiffre différent de zéro en partant de la gauche).

☞ Positionnement de la virgule

- **Pour mettre 0,0345 en écriture scientifique, on doit positionner la virgule juste après le 3 ;**
- **Pour mettre 254 en écriture scientifique, on doit positionner la virgule juste après le 2.**

METHODOLOGIE

Pour mettre un nombre décimal positif en écriture scientifique, il faut suivre les étapes suivantes :

☞ **Positionner la virgule au premier chiffre différent de zéro en partant de la gauche.**

☞ **Compter à partir de cette position le nombre de décalages de chiffres à effectuer pour reconstituer le nombre initial. On multiplie ensuite le nombre obtenu dans l'étape précédente par** 10^{m} **(pour un décalage de *m* chiffres vers la droite) ou par** 10^{-m} **(pour un décalage de *m* chiffres vers la gauche).**

EXEMPLES ILLUSTRATIFS DE COMPREHENSION

❐ **Mettre le nombre 548,3 en écriture scientifique.**

On positionne la virgule après le 5 comme l'indique la flèche 5 48,3 ; ce qui donne le nombre 5,483.

On voit facilement qu'il faut faire 2 décalages (de la flèche vers la virgule) vers la droite pour reconstituer le nombre initial ; donc il faut multiplier par 10^2.

☞ **L'écriture scientifique de 548,3 est donc** $5,483\times10^2$.

❐ **Mettre le nombre 3800 en écriture scientifique.**

On doit positionner la virgule juste après le 3 comme le montre la flèche 3 800. On obtient alors le nombre 3,8 (on supprime évidemment les zéros terminaux après la virgule).

On compte 3 décalages vers la droite (pour aller de la flèche jusqu'au dernier zéro) pour reconstituer le nombre initial : il faut donc multiplier par 10^3.

☞ **L'écriture scientifique de 3800 est donc** $3,8\times10^3$.

❐ **Mettre le nombre 0,000352 en écriture scientifique.**

On positionne extrêmement facilement la virgule après le 3 comme l'indique la flèche 0,0003 52. On obtient alors le nombre décimal 3,52.

On compte 4 décalages vers la gauche (pour aller de la flèche vers la virgule) pour reconstituer le nombre initial : il faut donc multiplier par 10^{-4}.

☞ **L'écriture scientifique de 0,000352 est alors** $3,52\times10^{-4}$.

REMARQUE : Dans la pratique, l'écriture scientifique d'un nombre se donne instantanément sans faire figurer les différentes étapes présentées ci-dessus.

V. Racines carrées

1. Définition

☞ **Soit *x* un nombre positif ou nul.**

On appelle racine carrée de ce nombre x, le nombre positif ou nul noté $\sqrt{x}$ dont le carré est *x*.

☞ **REMARQUES : ■ La définition dit tout de suite que la racine carrée d'un nombre positif ou nul est toujours un nombre positif ou nul et que $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.**

■ La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas (n'est pas définie).

2. Utilisation de la calculatrice

Pour calculer le nombre $\sqrt{x}$ avec une calculatrice, il faut taper la combinaison des touches suivante :

$\sqrt{\ }$ puis *x* ; ou bien (selon la calculatrice) *x* puis $\sqrt{\ }$ ou encore $x^{0,5}$.

EXERCICE DE COMPREHENSION : APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°6 :

A VOS CALCULATRICES !

Calculer les nombres suivants en arrondissant le résultat au millième si nécessaire.

① $a = \sqrt{1,96}$;

② $b = \sqrt{632}$;

③ $c = \sqrt{0,0872}$.

On obtient sans difficulté les résultats suivants :

① $a = \sqrt{1,96} = 1,4$;

② $b = \sqrt{632} \cong 25,140$;

③ $c = \sqrt{0,0872} \cong 0,295$.

3. Utilisation de la racine carrée

La racine carrée sert à calculer un nombre positif ou nul dont on connaît le carré. La règle ci-dessous précise cette utilisation.

REGLE : Soit *a* et *x* deux nombres positifs ou nuls.

$$\boxed{\text{Si } x^2 = a \text{, alors } x = \sqrt{a}}$$

NOTE : Quand on enlève le carré d'un côté et on prend la racine carrée de l'autre côté.

REMARQUE : Cette règle sera utilisée à chaque fois que nous allons appliquer le théorème de PYTHAGORE.

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°7 :

Calculer le nombre positif ou nul *x* dans chacun des cas suivants (on arrondira le résultat au dixième si nécessaire) :

① $x^2 = 28$ **;**

② $x^2 = 1296$ **;**

③ $x^2 = 4,23$ **;**

NOTE : On enlève le carré à gauche et on prend la racine carrée à droite.

① $x^2 = 28$ **donc** $x = \sqrt{28} \cong 5,3$ **;**

② $x^2 = 1296$ **donc** $x = \sqrt{1296} = 36$ **;**

③ $x^2 = 4,23$ **d'où** $x = \sqrt{4,23} = 2,1$ **.**

CONSEIL : Ne ratez pas une seule occasion d'arrondir les nombres décimaux, c'est très important.

EXERCICES A FAIRE ET A RENVOYER :

EXERCICE N°1 :

Calculer chacun des nombres suivants sous forme de puissances :

① $x = \dfrac{10^6 \times 10^3}{10^8}$ **;**

② $y = \dfrac{(10^5)^4 \times 10^8}{(10^7)^3 \times 10^4}$ **;**

EXERCICE N°2 :

① **On donne les nombres :**

$a = 480$; $b = 0{,}0048$; $c = 24000$; $d = 0{,}00024$; $e = 0{,}024$.

Indiquez devant chaque écriture scientifique de la liste ci-dessous, la lettre correspondante.

$\cdots\cdots = 2{,}4 \times 10^{-4}$; $\cdots\cdots = 4{,}8 \times 10^{2}$; $\cdots\cdots = 2{,}4 \times 10^{4}$; $\cdots\cdots = 4{,}8 \times 10^{-3}$; $\cdots\cdots = 2{,}4 \times 10^{-2}$.

② **Associer (par une flèche) à chacun des nombres de la colonne de gauche son écriture scientifique dans la colonne de droite.**

25000		$2{,}5 \times 10^{3}$
0,00000025		$2{,}5 \times 10^{-7}$
2500		$2{,}5 \times 10^{4}$

EXERCICE N°3 :

On donne les longueurs $AB = 6{,}8$ **et** $AC = 10{,}2$ **ainsi que la formule de PYTHAGORE** $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

① **Calculer** BC^2.

② **En déduire la longueur *BC* que l'on arrondira au dixième.**