PLANCHE-MATH13- Les fractions

I. Activité préliminaire de mise en route

On partage une somme de 800 € en 5 parts identiques. Pauline reçoit 2 de ces parts comme le montre le schéma ci-dessous.

$$\underbrace{\underbrace{160\text{ €} \qquad 160\text{ €}}_{\text{2 parts pour Pauline}} \qquad 160\text{ €} \qquad 160\text{ €} \qquad 160\text{ €}}_{\text{5 parts qui font 800 €}}$$

Le montant d'une part est $\frac{800}{5} = 160$ **€ ; donc la somme reçue par Pauline (2 parts) est** $2 \times 160 = 320$ **€.**

On dit que Pauline à reçu les $\frac{2}{5}$ **du montant total 800 € et on a** $\frac{800 \times 2}{5} = 500$ **€.**

II. Définitions et vocabulaire (à bien retenir !)

☞ **On appelle fraction le quotient** $\frac{a}{b}$ **de deux entiers *a* et *b* dans lequel l'entier *b* n'est pas nul.**

NOTE : On ne divise JAMAIS par 0 : il suffit de regarder ce que votre calculatrice affiche si vous divisez un nombre par 0.

☞ **Le nombre *a* situé au dessus de la barre de fraction s'appelle le numérateur de la fraction** $\frac{a}{b}$**.**

☞ **Le nombre *b* situé en dessous de la barre de fraction s'appelle le dénominateur de la fraction** $\frac{a}{b}$**.**

PAR EXEMPLE, pour la fraction $\frac{2}{5}$**, le numérateur est 2 et le dénominateur est 5.**

III. Fraction d'une quantité

La règle qui suit <u>est une règle hautement importante</u> de calcul.

☞ **<u>REGLE</u> : Pour calculer les $\frac{a}{b}$ d'une quantité *Q*, il faut faire $\frac{a \times Q}{b}$.**

<u>NOTE</u> : Il faut retenir que le numérateur qui est en haut multiplie la quantité Q et le dénominateur qui est en bas divise en restant en bas.

☞ **<u>EXEMPLE</u> : Calculer les $\frac{2}{5}$ de 800 €.**

La règle nous dit qu'il faut faire $\frac{2 \times 800}{5} = 320$ €. Donc les $\frac{2}{5}$ de 800 € font 320 €.

<u>CONSEIL</u> : Prenez tout de suite les bonnes habitudes ; c'est-à-dire de ne pas oublier les unités, <u>car en physique les unités sont très obligatoires</u>.

<u>APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°1</u> :

Dans une classe de coiffure de 30 élèves, les $\frac{2}{15}$ sont des garçons.
Calculer le nombre de garçons et le nombre de filles dans la classe.

- **Les garçons représentent les $\frac{2}{15}$ de l'effectif total (qui est 30). Donc il y a $\frac{2 \times 30}{15} = 4$ garçons.**
- **Les filles sont les élèves qui ne sont pas des garçons. Donc il y a $30 - 4 = 26$ filles.**

IV. Fraction d'une partie dans une quantité

☞ **<u>REGLE</u> : La fraction que représente une partie A dans une quantité Q est $\frac{A}{Q}$.**

☞ **<u>EXEMPLE</u> : Dans une classe de 15 élèves, il y a 8 filles. Quelle fraction représente le nombre de filles par rapport à l'effectif total de la classe ?**

☞ **La fraction que représente le nombre de filles est directement $\frac{8}{15}$.**

V. Transformations des fractions

1. Mise d'une fraction à un numérateur ou un dénominateur donné

☞ **REGLE FONDAMENTALE : Une fraction ne change pas si on multiplie (ou on divise) simultanément son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul. Autrement dit, on a :**

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}}$$

NOTE : On multiplie le numérateur et le dénominateur par le même nombre c différent de 0.

☞ **EXEMPLE : Prenons par exemple la fraction $\frac{3}{4}$; on a alors :**

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\mathbf{\frac{3}{4}} = \frac{3\times 2}{4\times 2}}_{On\ multiplie\ par\ 2} = \mathbf{\frac{6}{8}} = \frac{3\times 3}{4\times 3}}_{On\ multiplie\ par\ 3} = \mathbf{\frac{9}{12}} = \frac{3\times 5}{4\times 5}}_{On\ multiplie\ par\ 5} = \mathbf{\frac{15}{20}}$$

NOTE : Evidemment on peut continuer jusqu'au soir pour obtenir une liste de fractions identiques indiqués en gras.

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°2 :

① **Mettre la fraction $\frac{3}{8}$ au dénominateur 40.**

② **Mettre la fraction $\frac{5}{17}$ au dénominateur 51.**

③ **Mettre la fraction $\frac{9}{7}$ au numérateur 63.**

④ **Compléter les égalités fractionnaires suivantes :**

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{\cdots\cdots} = \frac{\cdots\cdots}{20} = \frac{36}{\cdots\cdots} = \frac{\cdots\cdots}{90} = \frac{168}{\cdots\cdots}$$

METHODOLOGIE :

Il faut commencer par trouver par quel nombre on doit multiplier. Pour cela, il faut diviser le dénominateur qu'on veut avoir par le dénominateur qu'on a (ou le numérateur qu'on veut par le numérateur qu'on a).

① **On passe du dénominateur 8 au dénominateur 40 en multipliant par 5 (40÷8=40). On a alors :**

$\frac{3}{8}=\frac{3\times5}{8\times5}=\mathbf{\frac{15}{40}}$;

② **Nous sommes en train de passer du dénominateur 17 au dénominateur 51 en multipliant par 3 (car 51÷17=3). On a donc :** $\frac{5}{17}=\frac{5\times3}{17\times3}=\mathbf{\frac{15}{51}}$;

③ **Il s'agit de passer du numérateur 9 au numérateur 63. On doit alors multiplier par 7 (car 63÷9=7). On obtient alors très vite :** $\frac{9}{7}=\frac{9\times7}{7\times7}=\mathbf{\frac{63}{49}}$;

④ **On multiplie successivement par 3 (pour passer au numérateur 12) ; par 5 (pour passer au dénominateur 20) ; par 9 (pour passer au numérateur 36) ; par 18 = 90÷5 (pour passer au dénominateur 90) ; et enfin par 42 = 168÷4 (pour passer au numérateur 168).**

D'où $\frac{4}{5}=\frac{12}{\mathbf{15}}=\frac{\mathbf{16}}{20}=\frac{36}{\mathbf{45}}=\frac{\mathbf{72}}{90}=\frac{168}{\mathbf{210}}$.

2. Simplification d'une fraction (à vos tables de multiplication !)

Une fraction est simplifiable lorsque son numérateur et son dénominateur peuvent être <u>simultanément</u> divisés par un même nombre entier.

☞ **Pour simplifier une fraction <u>on divise simultanément</u> son numérateur et son dénominateur <u>par un même nombre qui divise les deux</u>. Cela revient à utiliser la formule de simplification suivante :**

$$\boxed{\frac{a\times c}{b\times c}=\frac{a}{b}}$$

<u>NOTE</u> : On a simplifié la fraction par le nombre *c*.

☞ **<u>EXEMPLES</u> : ■ Simplifiez la fraction** $\frac{6}{8}$.

On peut diviser 6 et 8 par 2. On a donc $\frac{6}{8}=\frac{3\times2}{4\times2}=\mathbf{\frac{3}{4}}$ **(on a simplifié par 2)**

■ Simplifiez la fraction $\frac{45}{30}$.

On peut simplifier par 15 et on a $\frac{45}{30}=\frac{3\times15}{2\times15}=\frac{3}{2}$ **(on a donc éliminé les 15).**

CONSEIL PRATIQUE : Pour simplifier une fraction, il faut chercher à l'aide de la calculatrice (en testant les divisions) un nombre le plus grand possible qui divise à la fois le numérateur et le dénominateur.

3. Mise de deux fractions au même dénominateur

☞ Pour mettre deux fractions au même dénominateur il faut d'abord trouver un dénominateur commun (DC) au deux.

☞ Un dénominateur commun est un nombre qui figure à la fois dans les tables de multiplication des deux dénominateurs.

☞ **CONSEIL :** Avec la calculatrice on peut facilement et rapidement dresser les tables de multiplication des deux dénominateurs et mettre en évidence un dénominateur commun.

☞ **REMARQUE IMPORTANTE :** Le produit des deux dénominateurs est toujours un dénominateur commun, mais il est souvent beaucoup trop grand pour permettre des calculs efficaces.

EXEMPLES : ■ Mettre les fractions $\frac{5}{6}$ et $\frac{3}{8}$ à un même dénominateur.

En dressant les tables de multiplication de 6 et de 8, on s'aperçoit très vite que 24 apparaît dans les deux tables. Don 24 est un dénominateur commun. On a alors :

$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{20}{24}$ et $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} = \frac{9}{24}$.

■ Mettre les fractions $\frac{2}{15}$ et $\frac{3}{5}$ au même dénominateur.

On voit vite que 15 est un dénominateur commun puisqu'il est dans la table de 15 ($15 \times 1 = 15$) et dans la table de 3 ($3 \times 5 = 15$). La première fraction est déjà au dénominateur 15 et on a $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$.

VI. Opérations sur les fractions

1. Addition et soustraction

☞ **REGLE :** Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de même dénominateur, on additionne (ou on soustrait) leur numérateur et on garde au résultat leur dénominateur commun.

Autrement dit : $\boxed{\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} \quad et \quad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}}$

NOTE : Dans le cas où les fractions ne sont pas au même dénominateur, on commence par les ramener au même dénominateur puis on applique cette règle.

☞ **EXEMPLE : Effectuer les calculs :** $x=\frac{7}{15}-\frac{1}{15}$; $y=\frac{3}{8}+\frac{7}{8}$; $z=\frac{1}{10}+\frac{5}{6}$.

Nous avons $x=\frac{7}{15}-\frac{1}{15}=\frac{7-1}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2\times3}{5\times3}=\mathbf{\frac{2}{5}}$ **(on a simplifié le résultat par 3).**

$y=\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{3+7}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5\times2}{4\times2}=\mathbf{\frac{5}{4}}$ **(on a simplifié le résultat par 2).**

Enfin on a $z=\underbrace{\frac{1}{10}+\frac{5}{6}=\frac{1\times3}{10\times3}+\frac{5\times5}{6\times5}=\frac{3}{30}+\frac{25}{30}}_{On\ met\ les\ fractions\ au\ même\ dénominateur}=\frac{3+25}{30}=\frac{28}{30}=\frac{14\times2}{15\times2}=\frac{14}{15}$ **(on a simplifié le résultat par 2).**

REMARQUE : Le résultat d'un calcul fractionnaire doit toujours être simplifié même en l'absence de consigne.

2. Multiplication

☞ **REGLE : Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.**

Autrement dit : $\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}}$

☞ **EXEMPLE : Effectuer les calculs :** $x=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$; $y=\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}$; $z=\frac{8}{15}\times\frac{5}{6}$.

Nous avons $x=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{2\times4}{5\times3}=\mathbf{\frac{8}{15}}$ **;** $y=\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}=\frac{3\times7}{4\times5}=\mathbf{\frac{21}{20}}$ **; Enfin**

$z=\frac{8}{15}\times\frac{5}{6}=\frac{8\times5}{15\times6}=\frac{40}{90}=\frac{4\times10}{9\times10}=\mathbf{\frac{4}{9}}$ **(après simplification par 10).**

3. Division

Le quotient de deux fractions se ramène facilement à une multiplication par la règle ci-dessous.

REGLE : Pour diviser deux fractions, on multiplie la première d'entre elles par l'inverse de la seconde.

Autrement dit : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{b} \quad ou \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{b}$

☞ **EXEMPLE : Effectuer les calculs :** $x = \frac{2}{5} \div \frac{4}{3}$; $y = \frac{3}{8} \div \frac{5}{6}$; $z = \frac{8}{15} \div \frac{4}{9}$.

On a $x = \frac{2}{5} \div \frac{4}{3} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{6}{20} = \frac{3 \times 2}{10 \times 2} = \frac{3}{10}$ **(après simplification par 2) ;**

$y = \frac{3}{8} \div \frac{5}{6} = \frac{3}{8} \times \frac{6}{5} = \frac{3 \times 6}{8 \times 5} = \frac{18}{40} = \frac{9 \times 2}{20 \times 2} = \frac{9}{20}$ **(après simplification par 2) ;**

$z = \frac{8}{15} \div \frac{4}{9} = \frac{8}{15} \times \frac{9}{4} = \frac{8 \times 9}{15 \times 4} = \frac{72}{60} = \frac{6 \times 12}{5 \times 12} = \frac{6}{5}$ **(nous avons simplifié le résultat par 12).**

REMARQUE : Lorsqu'une fraction n'a pas de dénominateur, on considère que son dénominateur est 1.

On a par exemple : $2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{1} - \frac{4}{3} = \frac{2 \times 3}{1 \times 3} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}$

EXERCICES A FAIRE ET A RENVOYER :

EXERCICE N°1 :

① **Calculer les $\frac{4}{7}$ de 175 kg.** **(Réponse : 100 kg)**

② **Au début d'un soin esthétique l'esthéticienne remplit d'eau au $\frac{2}{3}$ la chaudière du Lucas Championnière dont la capacité est de 2,1 L. Calculer alors la quantité d'eau contenue dans cette chaudière.** **(Réponse : 1,4 L)**

③ **L'esthéticienne effectue une commande pour un montant de 510 € sur laquelle elle bénéficie d'une réduction tarifaire de $\frac{2}{17}$. Calculer, en euro, le montant de cette réduction.** **(Réponse : 60 €)**

EXERCICE N°2 :

Simplifier chacune des fractions suivantes :

① $\frac{9}{15}$; ② $\frac{48}{36}$; ③ $\frac{35}{49}$; ④ $\frac{54}{60}$.

EXERCICE N°3 :

Mettre les fractions ci-dessous au même dénominateur :

① $\frac{1}{2}$ **et** $\frac{2}{3}$; ② $\frac{2}{9}$ **et** $\frac{5}{12}$; ③ $\frac{3}{10}$ **et** $\frac{2}{15}$.

EXERCICE N°4 :

Effectuer les calculs suivants :

① $x=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$; ② $y=\frac{2}{9}-\frac{1}{6}$; ③ $z=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}$; ④ $t=\frac{2}{15}\times\frac{9}{8}$; ⑤ $u=\frac{12}{25}\times\frac{10}{9}$;

⑥ $v=\frac{3}{4}\div\frac{15}{8}$; ⑦ $w=\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{10}{9}}$.