PLANCHE-MATH14- Calcul des durées

Le théorème de THALES est un théorème qui sert à calculer des distances et qui sert à contrôler que des droites sont parallèles.

I. Préliminaires

Le théorème qui suit sert à contrôler que deux rapports sont égaux.

THEOREME (PRODUIT EN CROIX)

Soit a, b, c et d quatre nombres non nuls. Alors l'égalité

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

est vraie si et seulement si $a\times d=b\times c$**.**

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°1 :

Calculer le nombre x tel que $\frac{x}{28}=\frac{5}{7}$**.**

On a immédiatement $x=\frac{28\times 5}{7}=20$**.**

METHODOLOGIE (A SUIVRE !)

On multiplie les deux nombres connus sur une diagonale et on divise par le troisième nombre connu.

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°2 :

Calculer le nombre x tel que $\frac{42}{25}=\frac{25{,}2}{x}$**.**

- ☞ **Les deux nombres connus sur une diagonale sont 25 et 25,2.**
- ☞ **Le troisième nombre connu est alors 42.**

On a alors très vite $x=\frac{25\times 25{,}2}{42}=15$**.**

MISE EN GARDE :

Cette manipulation sera effectuée à chaque fois que vous appliquerez le théorème de Thalès. Il sera donc très difficile de continuer si vous ne maîtrisez pas complètement le produit en croix.

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°3 :

Calculer les longueurs AB et EF sachant que :

$$\frac{3,6}{AB}=\frac{9}{5} \text{ et } \frac{2,8}{6}=\frac{EF}{15}.$$

En suivant à la lettre nos techniques on obtient sans résistance : $AB=\frac{3,6\times 5}{9}=2$ **et** $EF=\frac{2,8\times 15}{6}=7$.

EXERCICE DE TRES HAUTE PREPARATION :

Calculer les longueurs OE et EF telles :

$$\frac{OE}{3,5}=\frac{4}{1,4}=\frac{12}{EF}.$$

En masquant (cachant) successivement le dernier rapport puis le premier on obtient facilement :

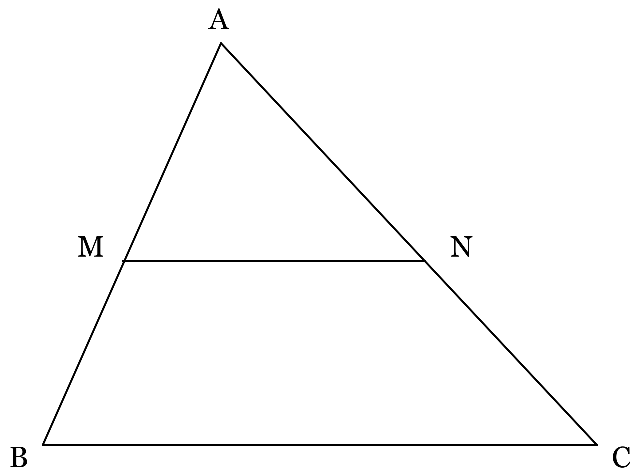
$OE=\frac{4\times 3,5}{1,4}=10$ **et** $EF=\frac{12\times 1,4}{4}=4,2$.

II. Le théorème de THALES (Enoncé direct)

Soit ABC un triangle ;

- **M un point du segment [A B] ;**
- **N un point du segment [A C].**

Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors on a : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$



Analysons tout de suite de très près, ce que dit ce théorème. Nous avons les égalités :

Côtes du triangle AMN
(Petit triangle)

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Côtes du triangle ABC
(Grand triangle)

☞ **Le théorème de Thalès traduit donc une égalité entre les rapports (il y en a 3) des côtés de deux triangles.**

MISE EN GARDE (ATTENTION !)

■ **<u>Les numérateurs (ou les dénominateurs) des trois rapports ne doivent contenir que des côtés d'un seul triangle et même triangle</u>. Par exemple si vous mettez un côté du petit triangle au numérateur, tous les côtés de ce triangle devront impérativement se mettre au numérateur. L'erreur malheureusement très fatale la plus courante est le non respect règle.**

■ **En plus, lorsque vous former vos rapports vous restez dans l'alignement (on reste en ligne !).**

METHODOLOGIE (A SUIVRE !)

☞ **Ce théorème sert à calculer des longueurs sous trois conditions :**

■ **M un point du segment [A B] (ou les points A, M et B sont alignés dans cet ordre) ;**

■ **N un point du segment [A C] (ou les points A, N et C sont alignés dans cet ordre) ;**

■ **Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.**

☞ **Ce théorème traduit une égalité entre trois rapports.**

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°4 :

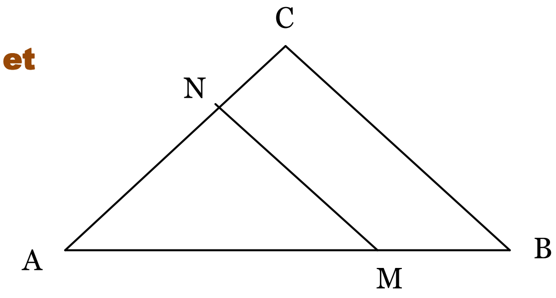
Sur la figure ci-contre on donne

AB = 35 cm ; AC = 28 cm ; AN = 6 cm et

BC = 21 cm.

On précise que (MN) // (BC).

Calculer AM et MN.



Dans le triangle ABC, on a :

- **M est un point de [A B] ;**
- **N est un point de [A C] ;**
- **(MN) // (BC) ;**

D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ **(attention aux mélanges et on reste en ligne !). En remplaçant par les longueurs connues (il faut penser à reporter vos longueurs sur la figure), on obtient :**

$$\frac{AM}{35}=\frac{6}{28}=\frac{MN}{21}.$$

D'après ce qui a été fait en préliminaires (voir §1), on a alors :

$AM=\frac{35\times 6}{28}=7{,}5\ cm$ **et** $MN=\frac{21\times 6}{28}=4{,}5\ cm$**.**

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°5 :

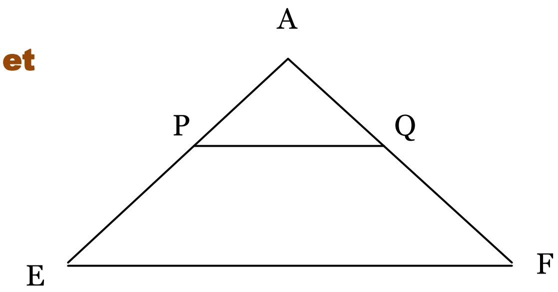
On donne la figure ci-contre :

AQ = 5 cm ; QF = 10 cm ; AE = 12 cm et

PQ = 7,5 cm ;

et (PQ) // (EF).

Calculer AP et EF.



On utilise le théorème de Thalès. Dans le triangle AEF, nous avons :

- **P est un point de [A E] ;**
- **Q est un point de [A F] ;**
- **La droite (PQ) est parallèle à (EF).**

Par Thalès, on a alors $\frac{AP}{AE}=\frac{AQ}{AF}=\frac{PQ}{EF}$ **avec AE = 12 cm ; AQ = 5 cm ; PQ = 7,5 cm** $AF = AQ+QF = 5+10 = 15\ cm$**. On a alors** $\frac{AP}{12}=\frac{5}{15}=\frac{7,5}{EF}$**.**

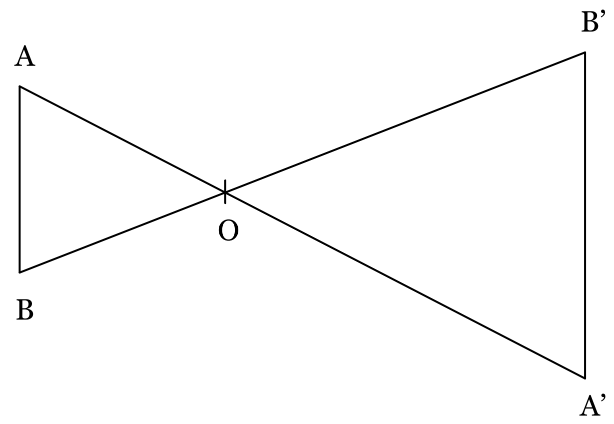
On a enfin $AP=\frac{12\times 5}{15}=4\ cm$ **et** $EF=\frac{7,5\times 15}{5}=22,5\ cm$**.**

REMARQUE :

Dans certains sujets de CAP, la place laissée ne permet pas une rédaction complète. Dans ce cas, on laisse de côté les trois premières lignes de cette correction (autrement dit, on écrit directement les rapports puis on fait le produit en croix).

III. La configuration papillon (théorème de Thalès bis)

Soit (AA') et (BB') deux droites sécantes en O



Si les droites (AB) et (A'B') sont parallèles (figure papillon), alors on a :

$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{AB'}$**.**

NOTE : Il s'agit là aussi des égalités des rapports entre les côtés de deux triangles.

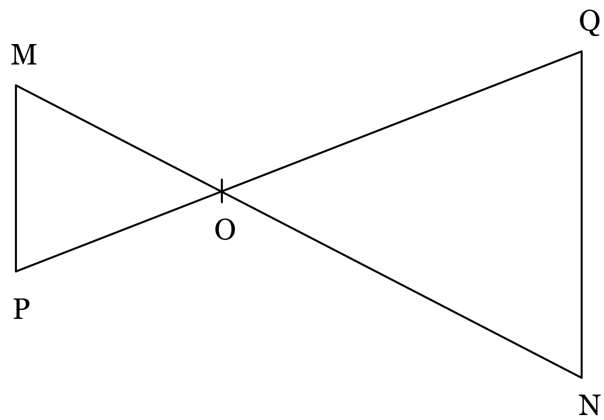
MISE EN GARDE : Dans ce théorème les distances sont notées au point de croisement O et on reste en ligne.

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°6 :

On donne la figure ci-dessous on donne les longueurs :

OM = 6 cm ; OP = 8 cm ; OQ = 18 cm et QN = 12 cm.

Sachant que les droites (MP) et (QN) sont parallèles, calculer les longueurs MP et ON.



On règle pat Thalès :

- **Les droites (MN) et (PQ) sont sécantes en O ;**
- **Les droites (MP) et (QN) sont parallèles.**

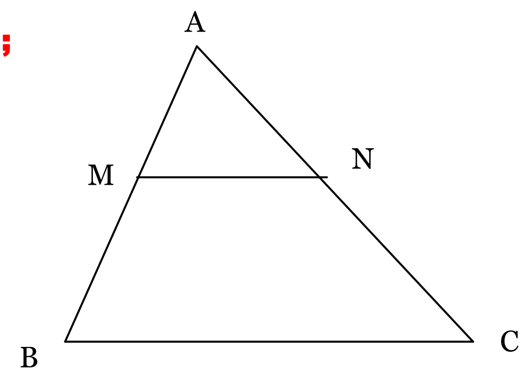
D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{ON}{OM} = \frac{OQ}{OP} = \frac{QN}{MP}$ **. D'où** $\frac{ON}{6} = \frac{18}{8} = \frac{12}{MP}$ **.**

Le produit en croix donne alors $ON = \frac{6 \times 18}{8} = 13{,}5\ cm$ **et** $MP = \frac{8 \times 12}{18} \cong 5{,}3\ cm$ **(au dixième).**

IV. La réciproque du théorème de Thalès

Soit ABC un triangle ;

- **M un point du segment [A B] ;**
- **N un point du segment [A C].**



Si deux des trois rapports $\frac{AM}{AB}$; $\frac{AN}{AC}$ *et* $\frac{MN}{BC}$ sont égaux, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
<u>NOTE</u> : Dans ce cas, les trois rapports sont alors égaux.

METHODOLOGIE (A SUIVRE !)

Ce théorème réciproque sert exclusivement à montrer que deux droites sont parallèles. Pour cela, il faut écrire et comparer des rapports.

Il devient alors important de se souvenir que :

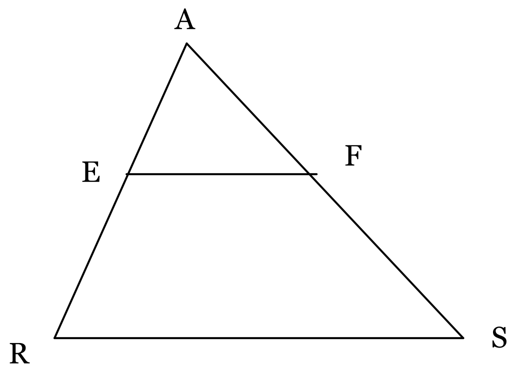
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ si et seulement si } a\times d = b\times c$$

Ce résultat déjà est un critère surpuissant pour contrôler l'égalité de deux rapports.

<u>APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°7</u> :

Sur la figure ci-dessous on donne : AR = 7,5 cm ; AE = 4,5 cm ; AF = 2,4 cm et AS = 4 cm.

Montrer que les droites (EF) et(RS) sont parallèles.



On utilise la réciproque du théorème de Thalès. Dans le triangle ARS, on a :

- **E est un point du segment [A R] ;**
- **F est un point du segment [A S].**

On compare les rapports : nous avons

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AE}{AR}=\dfrac{4,5}{7,5}\\ \textbf{et}\\ \dfrac{AF}{AS}=\dfrac{2,4}{4}\end{array}\right\}$$ **or** $4,5\times 4=18$ **et** $7,5\times 2,4=18$**. Donc** $\dfrac{4,5}{7,5}=\dfrac{2,4}{4}$**.**

On a donc l'égalité $\dfrac{AE}{AR}=\dfrac{AF}{AS}$ **et d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (RS) sont parallèles.**

EXERCICES A FAIRE ET A RENVOYER :

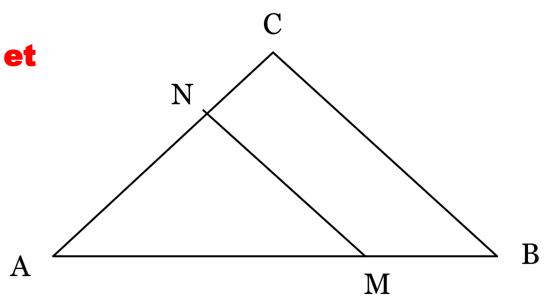
EXERCICE N°1 :

Sur la figure ci-contre on donne

AB = 28 cm ; AC = 22,4 cm ; AN = 4,8 cm et BC = 16,8 cm.

On précise que (MN) // (BC).

Calculer AM et MN.



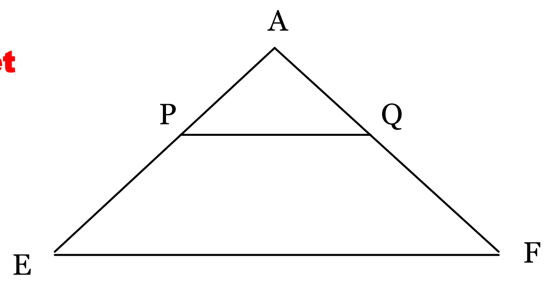
EXERCICE N°2 :

On donne la figure ci-contre :

AQ = 4 cm ; QF = 8 cm ; AE = 9,6 cm et PQ = 6 cm ;

et (PQ) // (EF).

Calculer AP et EF.

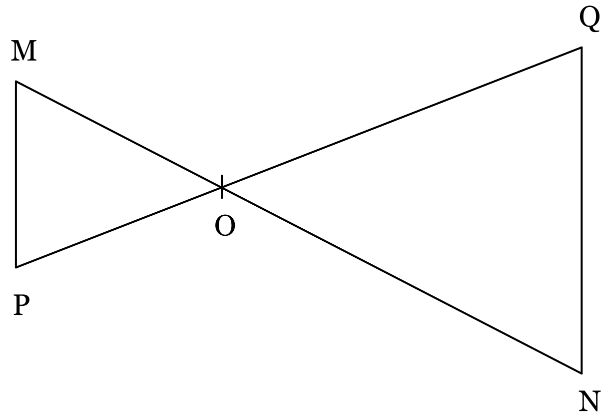


EXERCICE N°3 :

On donne la figure ci-dessous on donne les longueurs :

OM = 15 cm ; OP = 20 cm ; OQ = 45 cm et QN = 30 cm.

Sachant que les droites (MP) et (QN) sont parallèles, calculer les longueurs MP et ON.

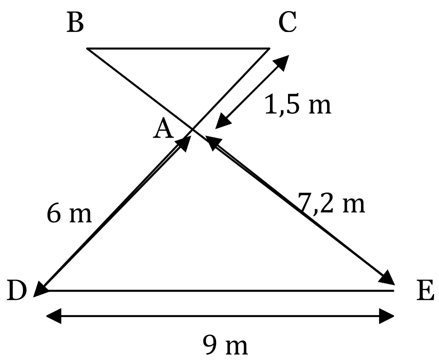


EXERCICE N°4 :

On se place dans la figure ci-contre.

① Calculer AB et BC.

② Calculer le périmètre p du triangle ABC.



Réponses : AB = 1,8 m ; BC = 2, 25 m et p = 5,55 m.