

PLANCHE-MATH5- Le théorème de PYTHAGORE

Le théorème de Pythagore, vieux comme le monde, connu comme le pain, est un théorème qui sert à calculer des longueurs dans un triangle rectangle.

I. Préliminaires

1. Carré d'un nombre :

■ Soit a un nombre quelconque donné. On appelle carré de ce nombre, le nombre noté a^2 défini par $a^2 = a \times a$ (on multiplie le nombre a par lui-même).

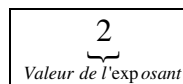
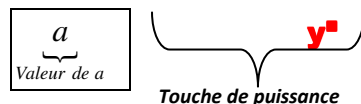
■ **EXEMPLE** : on a $5^2 = 5 \times 5 = 25$.

■ Le nombre a^2 se lit « a au carré » ou « a puissance 2 » ou « a exposant 2 ».

■ **UTILISATION DE LA CALCULATRICE** : Avant de nous lancer plus loin, assurez-vous de savoir calculer une racine carrée avec votre calculatrice. Pour cela, il faut donc disposer d'une calculatrice munie des fonctions adéquates. Pour calculer le nombre a^2 (c'est-à-dire « a au carré ») il faut taper (selon votre calculatrice) la combinaison des touches suivante :



Ou encore



suivie de la touche =

(EGAL).

NOTE : Certaines calculatrices disposent d'une touche x^2 qui permet de calculer directement le carré d'un nombre.

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°1 :

A l'aide de votre calculatrice, calculez les nombres :

- ① 14^2 ② $7,5^2$ ③ $3,6^2$

① On tape par exemple la combinaison « $14 \ x^y \ 2 =$ » et on trouve $14^2 = 196$.

NOTE : On peut aussi taper la combinaison « $14 \ x^2 =$ »

② On tape par exemple la combinaison « $7,5 \ x^y \ 2 =$ » et on trouve $7,5^2 = 56,25$.

③ On tape par exemple la combinaison « $3,6 \ x^y \ 2 =$ » et on trouve $3,6^2 = 12,96$.

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°2 :

A l'aide de votre calculatrice, calculer les nombres suivants :

① $a = 7,5^2 + 10^2$; ② $b = 3,6^2 + 4,8^2$

① **En tapant directement la combinaison « $7,5 \ x^2 + 10 \ x^2 =$ » on trouve alors $a = 156,25$.**

NOTE : On peut aussi calculer en plusieurs étapes de la façon suivante :

$a = 7,5^2 + 10^2 = 56,25 + 100 = 156,25$.

② **On trouve** $b = 3,6^2 + 4,8^2 = 12,96 + 23,04 = 36$.

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°3 :

**Dans un triangle ABC, on donne les longueurs $AB = 7,2\text{cm}$ et $AC = 9,6$.
Calculer alors $AB^2 + AC^2$.**

Nous avons directement $AB^2 + AC^2 = 7,2^2 + 9,6^2 = 144$.

2. Utilisation de la carrée d'un nombre :

THEOREME : Soit a un nombre positif ou nul donné. Si un nombre x positif ou nul vérifie l'égalité :

$$x^2 = a,$$

Alors, on a $x = \sqrt{a}$.

EXPLICATION : Dans l'égalité $x^2 = a$, pour obtenir la valeur de x , il faut « quitter » le carré. Le théorème dit justement que dès qu'on quitte le carré à gauche, on prend la racine carrée à droite.

MANIPULATION : La racine carrée d'un nombre se calcule avec une calculatrice avec la touche $\sqrt{}$. Pour calculer la racine carrée $\sqrt{a}$ d'un nombre a , il faut alors taper « le nombre a puis la touche $\sqrt{}$ puis la touche $=$ » ou encore selon les calculatrice « la touche $\sqrt{}$ puis le nombre a puis la touche $=$ ».

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°4 :

Calculer les nombres suivants en arrondissant le résultat au millième si nécessaire.

① $a = \sqrt{1,96}$; ② $b = \sqrt{632}$; ③ $c = \sqrt{0,0872}$.

On obtient sans difficulté les résultats suivants :

① $a = \sqrt{1,96} = 1,4$;

② $b = \sqrt{632} \approx 25,140$;

③ $c = \sqrt{0,0872} \approx 0,295$.

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°5 :

Calculer le nombre positif ou nul x dans chacun des cas suivants (on arrondira le résultat au dixième si nécessaire) :

① $x^2 = 28$; ② $x^2 = 1296$; ③ $x^2 = 4,23$;

RAPPEL DU MECANISME : On enlève le carré à gauche et on prend la racine carrée à droite.

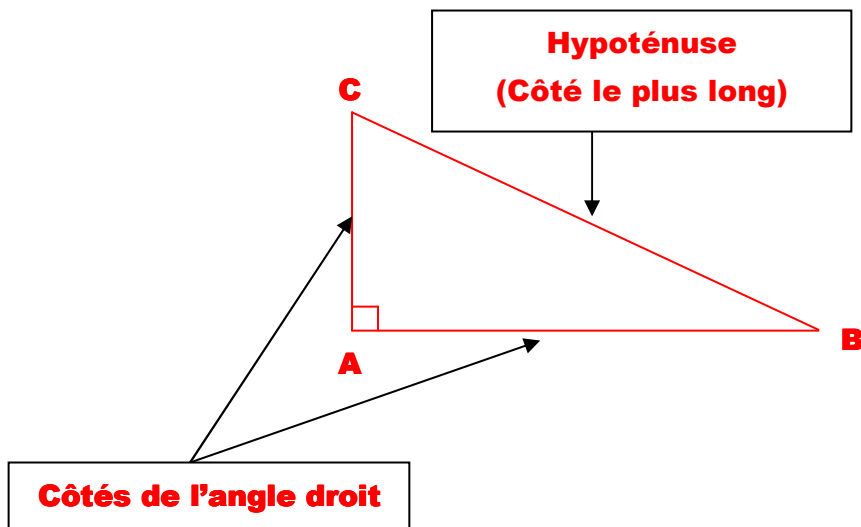
① $x^2 = 28$ **donc** $x = \sqrt{28} \approx 5,3$;

② $x^2 = 1296$ **donc** $x = \sqrt{1296} = 36$;

③ $x^2 = 4,23$ **d'où** $x = \sqrt{4,23} = 2,1$.

II. Vocabulaire

Soit ABC un triangle rectangle en A.



1. Les côtés AB et AC qui forment l'angle droit sont appelés côtés de l'angle droit.

2. Le côté BC qui ne forme pas l'angle droit s'appelle l'hypoténuse : c'est le côté le plus long.

NOTE : Ce vocabulaire doit indiscutablement être bien connu pour éviter que des difficultés se soulèvent par la suite.

Le théorème de PYTHAGORE que nous allons maintenant énoncer est une relation mathématique entre la longueur de l'hypoténuse et les longueurs des côtés de l'angle droit.

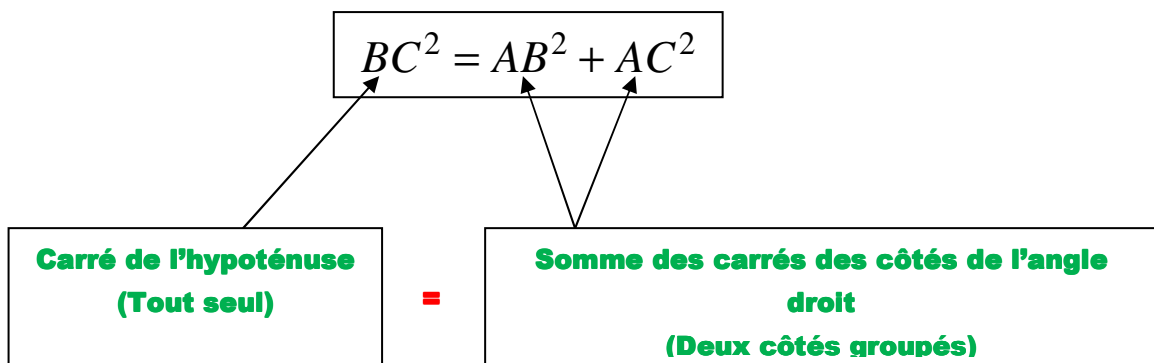
III. Le théorème de PYTHAGORE (Enoncé direct)

Soit ABC un triangle rectangle en A. Alors on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Autrement dit, dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

Analysons d'un peu plus près ce précieux théorème vieux comme le monde, connu comme le pain et qui fait couler beaucoup d'encre dans les classes. Nous avons :



METHODOLOGIE (A SUIVRE !)

1. Ce théorème s'applique exclusivement dans un triangle rectangle.

MISE EN GARDE : Appliquer le théorème de Pythagore dans un triangle qui n'est pas rectangle reviendrait à se sécher les pieds alors qu'ils sont immergés dans l'eau.

2. Ce théorème sert à calculer le troisième côté d'un triangle rectangle si on connaît les deux autres côtés.

■ Si on cherche le grand côté (hypoténuse) on écrit la formule :

$$(\text{GRAND CÔTE})^2 = (\text{1}^{\text{er}} \text{ PETIT CÔTE})^2 + (\text{2}^{\text{ième}} \text{ PETIT CÔTE})^2$$

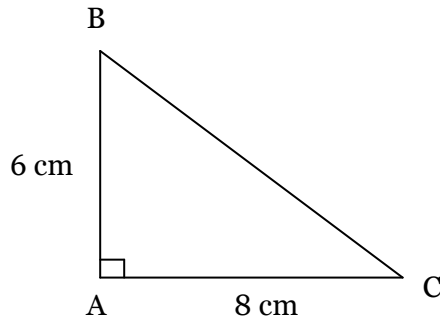
■ Par contre, si on cherche un petit côté (côté de l'angle droit), il faut faire :

$$(\text{PETIT CÔTE})^2 = (\text{GRAND CÔTE})^2 - (\text{L'AUTRE PETIT CÔTE})^2$$

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°6 :

**Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 6 \text{ cm}$ et $AC = 8 \text{ cm}$.
Calculer la longueur BC.**

Nous avons la figure ci-dessous qui n'est pas en vraie grandeur.



Nous cherchons l'hypoténuse (grand côté) ; le théorème de Pythagore donne alors :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 . \text{ Donc } BC^2 = \underbrace{6^2 + 8^2}_{\text{On remplace les longueurs connues}} = 100 .$$

On quitte alors le carré et on a alors $BC = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$.

CONSEIL :

Prenez tout de suite les bonnes habitudes ; c'est-à-dire de reporter les longueurs connues y compris celles que vous calculez sur la figure.

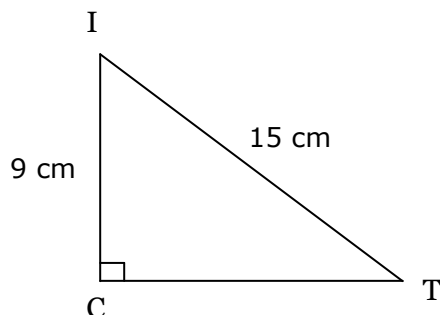
APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°7 :

TIC est un triangle rectangle en C tel que $TI = 15 \text{ cm}$ et $IC = 9 \text{ cm}$.

① Calculer la longueur TC.

② Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle TIC.

① On a la figure ci-dessous qui n'est pas en vraie grandeur.



Nous cherchons un petit côté ; le théorème de Pythagore s'écrit $TC^2 = TI^2 - CI^2$.

On remplace alors les longueurs connues : $TC^2 = 15^2 - 9^2 = 144$.

On a finalement $TC = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$.

② On dispose de la formule $\mathcal{A} = \frac{B \times h}{2} = \frac{TC \times CI}{2} = \frac{12 \times 9}{2} = 54 \text{ cm}^2$.

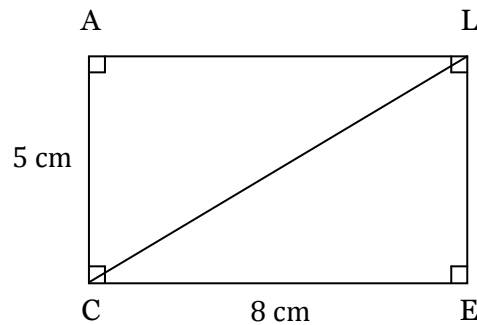
APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°8 :

CELA est un rectangle tel que CE = 8 cm et CA = 5 cm.

① **Calculer la longueur de la diagonale CL.**

② **Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle CELA.**

① **La figure n'est pas en vraie grandeur.**



Plaçons-nous maintenant dans le triangle CAL rectangle en A compte tenu du fait que CELA est un rectangle. Dans ce triangle on connaît AL = 8 cm et AC = 5 cm ; le théorème de Pythagore donne (on cherche le grand côté) :

$$CL^2 = AL^2 + AC^2 = 8^2 + 5^2 = 89 \text{ et par suite } CL = \sqrt{89} \approx 9,4 \text{ cm}.$$

② **Comme CELA est un rectangle, on a instantanément $\mathcal{A} = L \times \ell = CE \times CA = 8 \times 5 = 40 \text{ cm}^2$.**

IV. La réciproque du théorème de Pythagore

Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

C'est l'égalité de Pythagore.

METHODOLOGIE (A SUIVRE !)

1. Ce théorème réciproque sert à montrer (contrôler) qu'un triangle dont on connaît les trois côtés est rectangle.

2. On calcule d'une part, le carré du côté le plus long et d'autre part, la somme des carrés des deux autres côtés.

■ **S'il y a égalité, le triangle est rectangle d'hypoténuse son plus long côté.**

■ **Sinon, le triangle n'est pas rectangle.**

APPLICATION ET EXECUTION DES TÂCHES N°9 :

Soit ABC un triangle rectangle tel que $AB = 8,4$ cm et $AC = 11,2$ cm et $BC = 14$ cm. Montrer qu'il est rectangle.

Nous appliquons la réciproque du théorème de Pythagore car on connaît les trois côtés du triangle. On a :

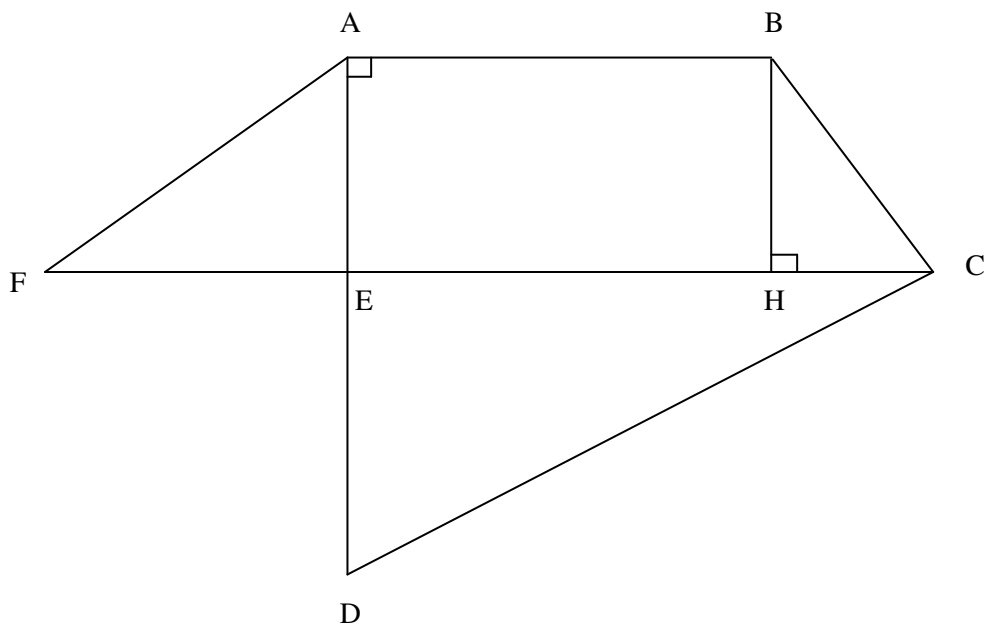
$$\square BC^2 = 14^2 = 196 ;$$

$$\square AB^2 + AC^2 = 8,4^2 + 11,2^2 = 70,56 + 125,44 = 196 ;$$

On constate que $BC^2 = AB^2 + AC^2$; d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

EXERCICE DE TRES HAUTE PREPARATION (On fait le point)

On considère la figure ci-dessous :



Données : $AB = 16$ cm ; $CD = 30$ cm ; $EF = 15$ m ; $AE = 20$ cm ; $AD = 38$ cm et $AF = 25$ cm.

- ① Démontrer que le triangle AEF est rectangle en E.**
- ② Calculer ED puis EC.**
- ③ Donner la nature du quadrilatère ABHE.**
- ④ Calculer la distance HC puis BC (on arrondira au dixième).**

- ⑤ Calculer le périmètre p de la figure de la figure ABCDEF.
- ⑥ Donner la nature du quadrilatère ABCF et calculer son aire $\mathcal{A}_1$.
- ⑦ Calculer l'aire $\mathcal{A}_2$ du triangle ECD.
- ⑧ En déduire l'aire totale $\mathcal{A}$ de la figure ABCDEF.

CONSEIL : Pensez toujours à reporter toutes les longueurs données et celles que vous calculez successivement sur la figure au fur et à mesure que vous les trouvez.

① Nous appliquons la réciproque du théorème de Pythagore. On a $EA = 20$ cm ; $EF = 15$ cm et $AF = 25$ cm.

Donc $AF^2 = 25^2 = 625$ et $EA^2 + EF^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625$. On a alors l'égalité $AF^2 = EA^2 + EF^2$, qui montre bien que le triangle AEF est rectangle en E.

② ■ Comme $E \in [AD]$, on voit sans peine ni sans gloire que :

$$ED = AD - AE = 38 - 20 = 18 \text{ cm}.$$

■ Pour calculer EC, on se place maintenant dans le triangle ECD rectangle en E car le triangle AEF est rectangle en E d'après la question 1. Avec le théorème de Pythagore, on a alors : $EC^2 = DC^2 - ED^2 = 30^2 - 18^2 = 576$. D'où $EC = \sqrt{576} = 24$ cm.

③ Le quadrilatère ABHE a quatre angles droits avec $AE \neq AB$. Donc ABHE est un rectangle.

④ ■ Comme ABHE est un rectangle, on a $EH = AB = 16$ cm et $BH = AE = 20$ cm. Par ailleurs, on a $H \in [EC]$, donc on peut écrire $HC = EC - EH = 24 - 16 = 8$ cm.

■ Le théorème de Pythagore appliqué au triangle BHC visiblement rectangle en H donne : $BC^2 = HB^2 + HC^2 = 20^2 + 8^2 = 464$, et par suite $BC = \sqrt{464} \approx 21,5$ cm.

⑤ **RAPPEL :** Le périmètre d'une figure est la distance totale que l'on parcourt en faisant un tour complet sur le bord de la figure.

Par définition, on a donc $p = AB + BC + CD + DE + EF + FA$; ce qui nous donne alors : $p = 16 + 21,5 + 30 + 18 + 15 + 25 = 125,5$ cm.

CONSEIL : Pour accélérer les calculs et éviter les erreurs inutiles d'étourderie, il est plus pratique de reporter toutes les longueurs sur la figure.

⑥ ■ ABHE étant un rectangle, on a alors $(AB) \parallel (EH)$. Donc $(AB) \parallel (EH)$ et de plus $AB \neq EH$. Le quadrilatère ABCF a donc deux côtés parallèles de longueurs différentes : c'est donc un trapèze.

■ On a instantanément la formule suivante bien connue pour l'aire :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{(B+b) \times h}{2} = \frac{(FC + AB) \times AE}{2}, \text{ avec } FC = FE + EC = 15 + 24 = 39 \text{ cm (} E \in [CF] \text{) ;}$$

$$AB = 16 \text{ cm et } AE = 20 \text{ cm. On a finalement } \mathcal{A}_1 = \frac{(39+16) \times 20}{2} = 550 \text{ cm}^2.$$

$$\textcircled{7} \text{ Nous avons facilement } \mathcal{A}_2 = \frac{B \times h}{2} = \frac{ED \times EC}{2} = \frac{18 \times 24}{2} = 216 \text{ cm}^2.$$

$$\textcircled{8} \text{ Par décomposition, on a } \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 550 + 216 = 766 \text{ cm}^2.$$

EXERCICES A FAIRE ET A RENVoyer :

EXERCICE N°1 :

[1]. Calculer les nombres $a = \sqrt{204}$ et $b = \sqrt{92}$ que l'on arrondira au dixième.

[2]. Calculer les distances AB ; AC et EF sachant que $AB^2 = 144$; $AC^2 = 108$; $EF^2 = 169$.

On arrondira les résultats au centième si nécessaire.

[3]. On donne les longueurs $AB = 6,8$ et $AC = 10,2$ ainsi que la formule de PYTHAGORE $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

① Calculer BC^2 .

② En déduire la longueur BC que l'on arrondira au dixième.

EXERCICE N°2 :

① Tracer avec la plus haute précision (attention !) un triangle TON rectangle en O tel que OT = 4,5 cm et ON = 6 cm.

② Mesurer à la règle, la distance NT.

③ Justifier par le calcul, la mesure ainsi obtenue en appliquant le théorème de Pythagore.

EXERCICE N°3 :

① Tracer, à la règle et au compas, un rectangle FELA tel que FE = 8 cm et FL = 10 cm.

② Calculer la distance LE.

EXERCICE N°4 :

① Tracer un rectangle COLI de largeur 5 cm et de longueur 7 cm.

② Calculer la longueur des diagonales de ce rectangle que l'on arrondira au dixième.

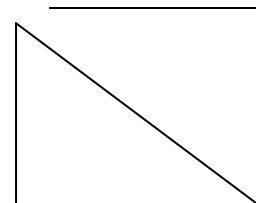
EXERCICE N°5 :

L'institut de coiffure de madame TOURTA a la forme schématisée ci-dessous. Il est formé d'un quadrilatère FELA bordé extérieurement un de ses côtés, d'un demi-cercle.

Données : FA = 18 m ; FE = 12,5 m et BE = 7,5 m.

NOTE : Tous les résultats seront arrondis au centième.

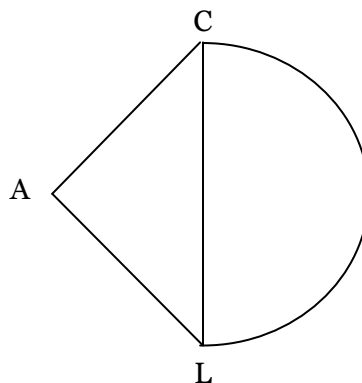
F



- ① Calculer la distance FB.
- ② En déduire la distance LE.
- ③ Quelle est la nature du quadrilatère ALEB ? Justifier votre réponse.
- ④ Donner, en justifiant la réponse, la nature du quadrilatère FELA.
- ⑤ Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ du quadrilatère FELA.
- ⑥ Calculer l'aire $\mathcal{A}_2$ du demi-cercle de diamètre [LE].
- ⑦ En déduire l'aire totale $\mathcal{A}$ de l'institut.
- ⑧ Madame TOURTA décide de réserver l'espace circulaire à l'accueil. Quel est alors le pourcentage de l'aire réservée à l'accueil par rapport à l'aire totale de l'institut ?

EXERCICE N°7 :

On considère la figure ci-dessous formé d'un triangle LAC rectangle en A et d'un demi-cercle.



Données : $AL = 8 \text{ cm}$ et $AC = 6 \text{ cm}$ (La figure n'est pas en vraie grandeur).

- ① Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ du triangle LAC.

- ② Calculer la longueur LC .
- ③ Calculer l'aire $\mathcal{A}_2$ du demi-cercle de diamètre $[LC]$.
- ④ En déduire l'aire totale $\mathcal{A}$ de la figure.
- ⑤ Calculer le périmètre ℓ du demi-cercle.
- ⑥ En déduire le périmètre p de la figure.

EXERCICE N°8 :

- ① Soit TAC un triangle tel que $TA = 7,8 \text{ cm}$; $TC = 10,4 \text{ cm}$ et $AC = 13 \text{ cm}$.
Montrer qu'il est rectangle.
- ② Soit TOC un triangle tel que $TO = 4,5 \text{ cm}$; $TC = 6 \text{ cm}$ et $OC = 7,5 \text{ cm}$.
Montrer qu'il est rectangle.
- ③ Soit TIC un triangle tel que $TI = 54 \text{ cm}$; $TC = 72 \text{ cm}$ et $IC = 90 \text{ cm}$.
Montrer qu'il est rectangle.
- ④ Le triangle SEL tel que $SE = 4,8 \text{ cm}$; $SL = 6,4 \text{ cm}$ et $LE = 8,4 \text{ cm}$ est il rectangle.
- ⑤ Soit un triangle SOL tel que $SO = 14,4 \text{ cm}$; $LO = 19,2 \text{ cm}$ et $SL = 24 \text{ cm}$.
Ce triangle est-il rectangle ?